Niveau(x) d'enseignement: 3 Numéro EDUQ : 8270364
Centre d'intérêt: 99

Lunkenbein, Dieter, 1937- .

Groupements de treillis / par Dieter Lunkenbein ; [pour la] Section enseignement. -- [Sherbrooke] : Université de Sherbrooke, Département de mathématiques, 1977.
viii, 245 p. : graph. ; 28 cm. -- (Rapport / Université de Sherbrooke, Département de mathématiques ; 19)

En tête du titre: Notes du cours Mat 4823, algebre, du programme de la maîtrise en enseignement à l'élémentaire (mathématique).
Bibliographie: p. v-viii. Dépouillement partiel: Travail final du cours MAT 4823 (groupements) : divers groupements sur les quadrilatères / par Louise Aubin, Richard Bibeau, Paul De La Chevrotière, Marcel Hamel.

Cote Dewey: 510.7/L963g Cote LC: QA/11

Descripteur(s): *Mathématiques *Didactique *Concept *Théorie de l'apprentissage *Primaire (Niveau)

Identificateur(s) de nom: *Piaget, Jean *Wittmann, Erich *Steiner, Hans-Georg

Identificateur(s) de sujet: *Groupement (Concept) *Treillis *Approche piagétienne

Notes de cours qui portent sur la psychologie génétique de Jean Piaget et le principe opératoire dans leur application à la didactique des mathématiques, cela à travers la notion de groupement. Le premier chapitre rappelle quelques concepts mathématiques fondamentaux concernant une formalisation du concept de groupement. Le deuxième chapitre porte sur la formalisation de ce concept par Wittmann et Steiner en termes de groupements de treillis et la compare avec celle originellement donnée par Piaget. Au troisième chapitre, on considère une série d'exemples en suivant essentiellement la classification piagétienne des groupements. Le cours se termine par des réflexions sur le rôle que le concept de groupement peut jouer dans un processus de rationalisation des interventions didactiques.

Type de document: r
Financement: Bénéficiaire - Université de Sherbrooke
Organisme(s) source(s) - MEQ-DGES
Programme(s) de subvention - FCAC
Auteur de l'analyse: jr

E D U Q 8270364

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Novembre 1977 Rapport no. 19

GROUPEMENTS DE TREILLIS

par

Dieter Lunkenbein

FACULTÉ DES SCIENCES

Département de mathématiques et d'informatique

E D U Q 8270364

SECTION ENSEIGNEMENT

Notes du cours Mat 4823, Algèbre
du programme de la
Maîtrise en enseignement à l'élémentaire
(mathématique)

Novembre 1977 Rapport no. 19

GROUPEMENTS DE TREILLIS

par

Dieter Lunkenbein

Document de travail
dans le cadre d'un projet de recherche
subventionné par le Programme F C A C
du Ministère de l'Education du Québec

Table des matières

Introduction

La psychologie génétique de Jean Piaget et le principe opératoire de la didactique de la mathématique 1

Chapitre premier

Quelques concepts fondamentaux de mathématique concernant une formalisation du concept de groupement de Jean Piaget. 6

1. Relations 6

1.1 Relations binaires en tant que sous-ensembles d'un produit cartésien 6

1.2 La notion de graphe en tant que schéma 8

1.3 Les fermetures réflexives transitives et symétriques d'un graphe d'une relation binaire 10

1.4 Relations d'ordre 15

1.5 Ensembles ordonnés 16

1.6 Graphe d'un ensemble ordonné 18

1.7 Bornes supérieures et inférieures 22

2. Treillis 25

2.1 Opérations binaires 25

2.2 Treillis 26

2.3 Demi-treillis 29

2.4 Treillis, en tant qu'ensemble ordonné 30

2.5 Graphes des treillis 38

2.6 Sous-treillis 41

Chapitre II

La formalisation du concepts de groupement par WITTMANN-STEINER - Groupements de treillis 42

1. Le travail de base de E. WITTMANN 42

2. Des précisions de M. -G. STEINER 44

3. Comparaison des propriétés élaborés par WITTMANN-STEINER avec celles données originalement par PIAGET 47

Chapitre III

Classification de groupements - opérations fondamentales de la pensée 50

1. Groupements logiques 51

1.1 Les groupements logiques d'inclusion 51

1.2 Groupements logiques de substitution 55

1.3 Groupements logiques de superposition complète de partitions 59

1.4 Groupements logiques de superposition partielle de partitions 64

1.5 Groupements logiques des classes d'une partition 65

2. Groupements infra-logiques 82

2.1 Groupements infra-logiques d'extension et de réduction 84

2.2 Groupements infra-logiques de substitution 91

2.3 Groupements infra-logiques de superposition complète de décomposition (partitions) 93

2.4 Groupement infra-logique de superposition partielle de décomposition 98

3. Quasi-groupements géométriques 98

Chapitre IV

Le concept de groupement et le processus de la rationalisation des interventions didactiques 105

1. La rationalisation des interventions didactiques 105

1.1 Introduction 105

1.2 Figures géométriques (Solides) dans l'enseignement de la géométrie à l'élémentaire 109

1.3 Conclusion 119

2. Le concept de groupement en tant qu'outil de la rationalisation des interventions didactiques 120

3. Les travaux de maitrise et le projet de recherche de l'équipe des didacticiens du département de mathématique 122

Annexe

Divers groupements sur les quadrilatères 125

BIBLIOGRAPHIE

[1] Hans Aebli,
Didactique psychologique,
Delachaux et Niestlé S.A.,
Neuchatel, 1951

[2] P. Crawley, Robert P. Dilworth,
Algebraic Theory of Lattices,
Prentice-Hall, Inc.,
Englewood Cliffs, N.J., 1973

[3] Thomas Donnellan,
Lattice Theorie, Pergamon Press,
Oxford - London - Edinbrugh - New York -
Toronto - Sydney - Paris - Braunschweig, 1968

[4] P. Dubreuil - M.L. Dubreuil-Jacotin,
Leçons d'algèbre moderne, (chap. V),
Collection universitaire de mathématiques, Dunod,
Paris, 1964

[5] A. Fricke, K. Besuden,
Mathematik. Elemente einer Didaktik
und Methodik.
Klett, Stuttgart, 1970

[6] L. Goerke,
Einige algebraische Begriffe in Piagets "Psychologie
der Intelligenz",
Math.-phys. Semesterberichte 6 (1959),
S. 68-81.

[7] G. Granger,
Un Problème d'Axiomatisation en Psychologie. Le "Groupement" de Jean Piaget,
Logique et Analyse, 29 (1965), p. 72-85.

[8] H. Griesel,
Ueberlegungen zu den mathematischen und psychologischen Grundlagen des Rechenunterrichts in der Grundschule,
Beitraege zum Mathematikunterricht 1969,
Schroedel, Hannover, 1970.

[9] J.-B. Grize,
Du groupement au nombre: essai de formalisation,
Etudes d'épistémologie génétique,
Vol. XI, Paris, 1960.

[10] M. Hamel, D. Lunkenbein,
La mathématique à l'école élémentaire renouvelée,
guide pédagogique, vol 1, 2, 3,
Les Editions Julienne, Longueuil, 1970, 1972, 1975.

[11] Dieter Lunkenbein,
La rationalisation des interventions didactiques,
Université de Sherbrooke, 1974.

[12] Dieter Lunkenbein,
Le concept de groupement de Piaget - un concept outil pour la rationalisation des interventions didactiques,
Université de Sherbrooke, 1974.

[13] Dieter Lunkenbein,
Le concept de groupement de Piaget et la rationalisation des interventions didactiques dans l'enseignement de la géométrie à l'élémentaire,
Université de Sherbrooke, 1974.

[14] Dieter Lunkenbein,
Didactique de la mathématique,
Notes du séminaire Mat 4873,
Université de Sherbrooke, Sherbrooke, 1977.

[15] S. MacLane, G. Birkhoff,
Algebra, The MacMillan Company,
New-York, 1967.

[16] Jean Piaget,
La psychologie de l'intelligence,
Armand Colin, Paris Ve, 1967.

[17] B. Roy,
Algèbre moderne et théorie des graphes,
tome 1, Dunod, Paris, 1969.

[18] Hans-Georg Steiner,
Der Mini-computer von Papy als Piagetsche Gruppierung,
Didaktik der Mathematik 2, 1973,
(131-142)

[19] Hans-Georg Steiner,
Mathematische Praezisierungen und didaktisch relevante
Modelle zum Piagetschen Gruppierungsbegriff,
Didaktik der Mathematik, 3, 1973, 210-225.

[20] G. Szasz,
Théorie des treillis, Monographies universitaires
de mathématiques,
Dunod, Paris, 1971.

[21] E. Wittmann,
Zum Begriff "Gruppierung" in der Piagetschen Psychologie,
Beitraege zum Mathematikunterricht 1972,
Teil 2, Schroedel, Hannover, 1973.

[22] E. Wittmann,
The concept of Grouping in Jean Piaget's Psychologie -
Formalisation and Applications,
Educational Studies in Mathematics,
5, 1973, 125 - 146.

[23] E. Wittmann,
Grundfragen des Mathematikunterrichts,
Vieweg, Braunschweig, 1975.

[24] E. Wittmann,
Natural Numbers and Groupings,
Educational Studies in Mathematics, 6,
1975, 53 - 75.

Introduction

La psychologie génétique de J. Piaget et le principe opératoire de la didactique de la mathématique.

Dans son oeuvre "La psychologie de l'intelligence" [16], J. Piaget cherche à "comprendre par quel mécanisme l'intelligence en vient à construire des structures cohérentes, susceptibles de composition opératoires "[16, page 38]. Il trouve les fondements d'un tel mécanisme dans les actions concrètes qui s'intériorisent en "opérations" et dans la coordination, par l'individu, de celles-ci en "systèmes d'ensemble". Ces "groupements" sont conçus en tant que systèmes d'opérations en "équilibre dynamique".

Ce qui est déterminant dans l'approche piagétienne est alors et avant tout la fondation de schèmes de pensée ou de reconnaissance sur des actions. Ensuite, il est essentiel que les actions appartenant à certains types de problèmes ou de situations se regroupent en systèmes d'ensemble structurés, dont la présence est un élément constitutif de l'intelligence: "chaque individu est en possession de classifications, de sériations , de systèmes d'explications, d'un espace et d'une chronologie personnels, d'une échelle des valeurs, etc., aussi que de l'espace et du temps mathématisés, des suites numériques. Or, ces groupements et ces groupes ne naissent pas à propos de la question mais

durant toute la vie; ... et c'est relativement à ces systèmes d'ensemble que les problèmes se posent, dans l'exacte mesure où des faits nouveaux surgissent, qui ne sont pas encore classés, sériés etc." [16, page 45]

Les groupements sont acquis et développés par un processus complexe d'adaptation. Ce dernier est constitué par l'assimilation, c'est-à-dire "l'action de l'organisme sur les objets qui l'entourent", par l'accommodation, c'est-à-dire l'action du milieu sur l'organisme, et par le développement de mécanismes d'équilibre entre assimilation et accommodation. Ce processus fait éclore le groupement en tant que champ global d'actions.

"Le problème essentiel de la psychologie de la pensée est alors", selon Piaget, "de dégager les lois d'équilibre de ces systèmes ... et de formuler les lois de ces totalités comme telles." [16, page 43] Psychologiquement, le groupement consiste en une certaine forme d'équilibre des opérations, donc des actions intériorisées et organisées en structures d'ensemble, et le problème est de caractériser cet équilibre, à la fois par rapport aux divers niveaux génétiques qui le préparent et en opposition avec des formes d'équilibre proposées à d'autres fonctions de l'intelligence". ... "Du point de vue logistique, le groupement présente une structure bien définie (parente de celle du groupe, mais en différant sur quelques points essentiels)" [16, page 44]. Les éléments d'un groupement sont appelés (dans le sens d'une définition axiomatique) des opérations. Pour la composition des

opérations d'un groupement, Piaget énonce les lois suivantes [16, page 49]:

"Si l'on exprime ces cinq conditions du groupement en un schéma logistique, on aboutit alors aux simples formules suivantes:

1° Composition: $x+x'= y$; $y+y'= z$; etc.

2° Réversibilité: $y-x= x'$ ou $y-x'= x$.

3° Associativité: $(x+x') + y'= x+(x'+y')= (z)$

4° Opération identique générale: $x-x= 0$; $y-y= 0$, etc.

5° Tautologie ou identiques spéciales:

$x+x= x$; $y+y= y$; etc.

Ces traits fondamentaux de la psychologie génétique de la pensée et de la théorie de connaissance de Piaget ont été appliqués à la didactique et, plus particulièrement, à la didactique de la mathématique par H. Aebli [1] , A FRICKE [5], E. WITTMANN [23] et autres. Des concepts comme la "méthode génétique" ou le "principe opératoire" jouent un rôle important dans la didactique de la mathématique d'aujourd'hui. H. Aebli demande que, pour acquérir des contenus conceptuels, l'élève apprenne à effectuer certaines opérations. Ce sont les opérations qui définissent les concepts et l'enseignement doit être organisé tel que les élèves effectuent ces opérations, d'abord effectivement et ensuite de manière intériorisée. L'exercice opératoire [1] est la base de tout enseignement dynamique. Cet exercice doit être conçu, selon le groupement correspondant, en tant que traitement global et opératoire d'une unité mathématique [5] . Ensuite, les

élèves effectueront eux-mêmes les opérations (éventuellement à l'aide d'un matériel concret approprié). E. WITTMANN formule le principe opératoire comme suit [23, page 61]

> "L'enseignement doit être conçu tel que les opérations qui se développent en tant qu'intériorisations d'actions concrètes puissent s'organiser en groupements"[1]

Il intègre ensuite ce principe en tant que partie constituante dans ce que l'on appelle la méthode génétique de l'enseignement de la mathématique [23, page 97] et où on s'en sert en tant que règle constructive pour l'élaboration d'unités d'enseignement.

A cause de sa position centrale dans la théorie de Piaget et à cause de son importance pour la didactique opératoire, le concept de groupement et ses manières d'application ont été sujet d'analyses critiques à maintes reprises. D'abord, la formalisation de Piaget (cité ci-haut à la page 3) a été trouvé insatisfaisante. On a alors essayé d'identifier le concept de groupement avec celui de groupe [6] . D'autres ont tenté des formalisations nouvelles [7; 9; 21] .

Les lacunes de la formulation piagétienne(page 3) sont faciles à reconnaître [8]. Les axiomes 1° à 4° décrivent essentiellement la structure d'un groupe. L'axiome 5° réduit les modèles à des groupes à 1 seul élément, car dans un groupe, il n'y a

---

1. Traduction de l'auteur; voir aussi [14, page 33] .

qu'un seul élément qui satisfasse 5°, l'élément neutre.

La plupart des essais de reformuler le concept de groupement n'ont pas pu résister aux critiques. Cependant, la formulation de WITTMANN [22] est formellement correcte et semble interpréter adéquatement la pensée piagétienne. Cette définition a été simplifiée par la suite par STEINER [19] pour finalement être généralisée (dans le langage des catégories) par WITTMANN lui-même [24].

Dans ce qui suit, nous préparons d'abord (au chapitre premier) des concepts mathématiques nécessaires à la compréhension de la formalisation de WITTMANN - STEINER. Ensuite (au 2e chapitre) nous présentons cette formalisation en termes de groupements de treillis et nous la comparons avec celle originalement donnée par PIAGET. Au 3e chapitre nous considérons une série d'exemples en suivant essentiellement la classification piagétienne de groupements. Nous terminerons ce cours par des réflexions sur le rôle que le concept de groupement peut jouer dans un processus de rationalisation des interventions didactiques (chapitre 4). La généralisation du concept dans le langage des catégories est réservée au cours Mat 4883.

Chapitre premier

Quelques concepts fondamentaux de mathématique concernant une formalisation du concept de groupement de PIAGET.

Remarque préalable.

Nous présumons ici la connaissance des notions mathématiques de base telles que définies dans [10] .
Nous y ajoutons dans ce chapitre des concepts mathématiques qui nous seront utiles dans notre étude du concept de groupement. Si par la suite, d'autres concepts mathématiques s'avèrent indispensables pour cette étude, alors nous les introduirons au fur et à mesure.

1. Relations.

1.1 Relations binaires en tant que sous-ensembles d'un produit cartésien.

Nous partons plus particulièrement du concept de relation binaire tel que défini dans [10, vol. 2].
Puisque les relations (binaires) sont des (sous)-ensembles de produits cartésiens nous pouvons y appliquer tous les concepts et toutes les opérations ensemblistes. Ainsi nous dirons:

Définition 1: Soient R et R' deux relations binaires entre les éléments d'un ensemble A et les éléments d'un ensemble B ($R \subseteq A \times B$ et $R' \subseteq A \times B$).

dirons que "R' est une sous-relation de R." (ou R' est inclus dans R) si $R' \subseteq R$. L'intersection $(R \cap R')$ des relations R et R' se définit alors comme la relation $\bar{R}$ de tous les éléments qui sont à la fois dans R et R'. De façon analogue, la réunion $(R \cup R')$ des relations R et R', la relation $\hat{R}$, comprend tous les éléments qui sont dans R ou dans R'.

Exemple: Considérons dans une famille (comprenant des enfants et des parents) les relations "...est fils de ..." et "...est fille de... . Précisons ces relations et cherchons à y appliquer les notions $\subseteq$, $\cap$ et $\cup$. Trouvons d'autres exemples.

Définition 2: Soit $R \subseteq A \times B$ une relation binaire entre les éléments de A et les éléments de B. La relation

$$R^{-1} = \{(b,a) \ / \ (a,b) \in R\}$$

est l'inverse de la relation R. Donc $R^{-1} \subseteq B \times A$

Exercice: Donnez quelques exemples de relations et donnez leur inverse.

1.2 La notion de graphe en tant que schéma

a) Définition[1]

On appellera graphe G tout schéma situé dans $\mathbb{R}^n$ (n étant le plus souvent égal à 2), constitué:

- d'une part, d'un ensemble X de points de R^n appelés sommets du graphe; à moins d'indications contraires, nous supposerons que les sommets sont en nombre fini;

- d'autre part, d'un ensemble U de lignes, munies ou non d'une orientation (l'absence d'orientation pouvant s'interpréter comme double orientation), reliant chacune deux sommets (distincts ou non), et eux deux seulement; chacune de ces lignes est entièrement définie par le couple (x_i, x_j) ou la paire (x_i, x_j) de sommets qu'elle relie:

  .ce couple étant ordonné comme l'indique le sens d'orientation dans le cas où la ligne en porte un, celle-ci s'appelle alors un arc;

  .cette paire étant dépourvue d'ordre - ou considérée comme la juxtaposition de deux couples ordonnés (x_i, x_j), (x_j, x_i) - dans le cas où la ligne ne porte aucun sens d'orientation, elle s'appelle alors une arête et s'identifie à deux arcs orientés en sens opposés entre les deux mêmes sommets.

---

1. cf. [17], page 153

On écrit G= (X,U) et

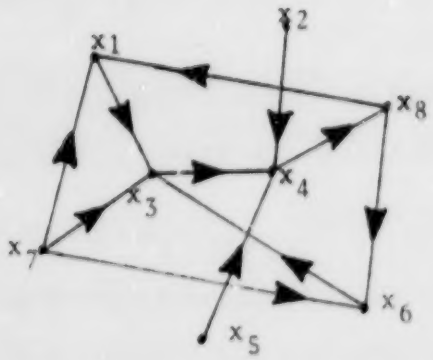
on dit que deux sommets x_i et x_j sont adjacents ssi ils sont reliés par une ligne de U.

b- Isomorphisme de deux graphes.

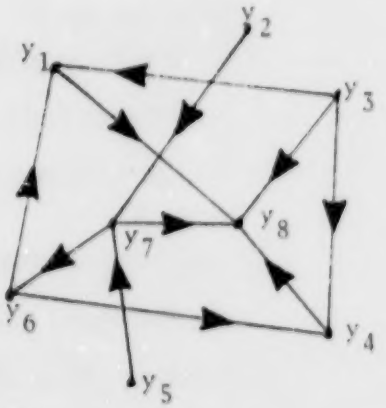
Etant donné deux graphes G = (X,U) et G'= (X',U'). G et G' sont dits isomorphes ssi il existe une bijection γ de X sur X' telle que

(x_i, x_j) est un arc de U si $(x'_i, x'_j) = (\gamma(x_i), \gamma(x_j))$ est un arc de U'

Exercice: Les deux graphes suivants G et G' sont-ils isomorphes?



G



G'

c- Un graphe en tant que représentation d'une relation binaire.

Un graphe G= (X, U), en tant que schéma, apparaît comme une figure simplifiée visant à représenter non la forme, mais les relations ou le fonctionnement des objets symbolisés par X. G peut donc toujours être considéré comme une représentation graphique d'une relation binaire R de X à X, U représentant précisément l'ensemble de couples de X^2 pour lesquels R est vérifiée.

Pour représenter une relation $R \subseteq A \times B$ entre les éléments de A et les éléments de B nous mettons simplement $X = A \cup B$; l'ensemble U représentant alors les éléments de $R \subseteq A \times B$.

1.3 Les fermetures réflexives, transitives et symétriques d'un graphe ou d'une relation binaire.

a- Fermeture réflexive.

Considérons un graphe G= (X,U) qui n'est pas réflexif. Il suffit d'adjoindre une boucle à chacun des sommets qui n'en a pas pour former un graphe $\rho(G) = (X, \rho(U))$ qui soit réflexif. Alors on a:

$G \subset \rho(G)$[1] et tout arc dans $\rho(U) \setminus U$ est nécessaire

1. Pour deux graphes $G = (X,U)$ et $G' = (X,U')$ on définie $G \subset G'$ ssi $U \subset U'$.

pour rendre G réflexif.

La fonction ρ transforme alors le graphe G dans le graphe $\rho(G)$ qui est le plus "petit" des graphes définis sur X qui est réflexif et qui contient G comme graphe partiel. On donne à " ρ" le nom fermeture réflexive.

b- Fermeture transitive.

De façon analogue, nous pouvons définir une fonction τ qui transforme un graphe $G = (X,U)$ en un graphe $\tau(G) = (X, \tau(U))$ tel que

- $\tau(G)$ est transitif
- tout arc dans $\tau(U) \setminus U$ est nécessaire pour que $\tau(G)$ soit transitif et
- $G \subseteq \tau(G)$

Ainsi G est transformé par τ en $\tau(G)$ qui est le plus "petit" des graphes définis sur X qui est transitif et qui contient G comme graphe partiel. On donne à τ le nom fermeture transitive.

c- Fermeture réflexo-transitive.

Si nous appliquons au graphe $G = (X, U)$ la fonction $\rho(\tau(G)) = \tau(\rho(G))$ alors nous transformons G en un graphe G' qui est le plus "petit" des graphes définis sur X qui est réflexif et transitif et qui

contient G comme graphe partiel. On donne à $\sigma\tau$ ou à à $\tau\sigma$ le nom <u>fermeture réflexo-transitive</u>.

d- <u>Fermeture symétrique</u>.

De façon analogue, nous pouvons définir une fonction σ qui transforme un graphe $G = (X,U)$ en un graphe $\sigma(G) = (X, \sigma(U))$ tel que

- $\sigma(G)$ est symétrique
- tout arc dans $\sigma(U) \setminus U$ est nécessaire pour que $\sigma(G)$ soit symétrique
- $G \subseteq \sigma(G)$

Ainsi, G est transformé par σ en $\sigma(G)$ qui est "le plus petit" des graphes définis sur X qui est symétrique et qui contient G comme graphe partiel. On donne à σ le nom de fermeture <u>symétrique</u>.

e- <u>Fermeture symétro-transitive</u>.

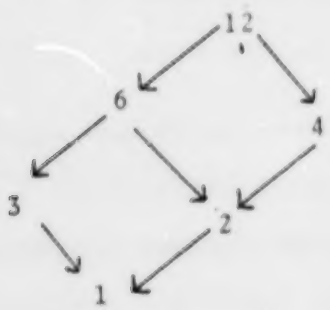
On peut vérifier que $\sigma\tau(G) = \tau\sigma(G)$. $\sigma\tau$ est appelé la fermeture symétro-transitive. On peut vérifier que $\sigma\tau$ transforme un graphe G en un graphe $\sigma\tau(G)$ qui est le plus petit graphe qui est symétrique et transitif et qui contient G comme graphe partiel.

Remarque: Ces trois fermetures définies en termes de graphes pourraient tout aussi bien l'être en terme de relations binaires.

Exercices:

1 Considérons l'ensemble $\overline{G}_2$ de tous les graphes définis sur un ensemble X comprenant deux éléments, $X = \{x_1 , x_2\}$. Cherchons ensuite pour tout élément de $\overline{G}_2$ la fermeture réflexive, la fermeture transitive et la fermeture réflexo-transitive.

2 Voici le graphe G d'une relation arithmétique



Construisons la fermeture réflexo-transitive $\rho(\tau(G))$ de ce graphe; quelle relation est symbolisée par $\rho(\tau(G))$

3 Sur $\mathbb{N}$, considérons les relations

R: "diffère par un multiple de 2"

S: "diffère par un multiple de 3"

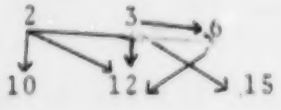
Trouver $R \cup S$, $R \cap S$, R^{-1}

4 Montrer que si R et S sont deux relations d'ordre sur le même ensemble, alors $R \cap S$ est encore une relation d'ordre.

5 Sur les humains, soient R: "est père de" et S: "est mère de". Trouver $R \cap S$, $R \cup S$, R^{-1}.

6 Représenter par un graphe orienté la relation: "divise" sur {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}.
Est-il isomorphe au graphe de la relation "est facteur de " sur le même ensemble?

7 Vérifier si les deux graphes suivants sont isomorphes et expliciter l'isomorphisme:



8 a) Définir la fermeture symétrique d'une relation.

b) Soit la relation: "est le double de" sur {2,3,4,6,8,12,16}, faire le graphe de:

a) fermeture réflexive
b) la fermeture symétrique
c) la fermeture transitive
d) la fermeture symétro-transitive.

c) Décrire en mots, si possible, ces fermetures, i.e. ces nouveaux graphes.

d) La fermeture symétro-transitive d'une relation est-elle toujours réflexive?

9 Même question que 8c avec la relation: "a une syllabe de plus" sur les mots français.

10 Prouver que $\rho(\tau(G)) = \tau(\rho(G))$
où G est un graphe, ρ est sa fermeture réflexive
et τ sa fermeture transitive.

11 Comment pourrait-on décrire à l'aide des ensembles
la fermeture symétrique d'une relation S ?

Exemple: la fermeture réflexive de S définie dans A est $S \cup \Delta$, où $\Delta = \{ (x,x) \mid x \in A \}$

1.4 Relations d'ordre.

Nous utiliserons le concept de relation d'ordre tel que défini dans [10], vol. 2, page 161 à 163. Pour des raisons de commodité et parce que les relations d'ordre large formeront la base de nos réflexions nous dirons tout simplement "ordre" pour une relation d'ordre large.

Donc, quand il s'agira d'une relation d'ordre dans un ensemble donné, nous penserons à une relation dans cet ensemble qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

Remarque: L'antisymétrie d'une relation R dans un ensemble E est souvent définie différemment que dans [10, vol. 2]
On trouve la définition suivante:

Une relation R dans un ensemble E est <u>antisymétrique</u> ssi pour toute partie d'éléments x, y ∈ E on a:
Si (xRy et yRx) alors x = y.

Exercice: Montrez que cette définition est équivalente à celle donnée dans [10, vol. 2] .

1.5 Ensembles ordonnés.

Si une relation d'ordre R est définie sur un ensemble E, on dit alors que E est un <u>ensemble ordonné</u> relativement à R. Si, de plus, R est une relation d'ordre total, on dit que E est un <u>ensemble totalement ordonné</u> ou une <u>chaîne</u>, relativement à R.

<u>Remarque</u>: Pour symboliser une relation d'ordre quelconque, on utilise souvent le signe ≤ (voir aussi (13)). Nous l'utilisons aussi dans ce cours pour des raisons de commodité en insistant sur le fait que ce signe peut symboliser une autre relation que la relation "plus petit ou égal" dans un ensemble de nombres.

Deux éléments a, b d'un ensemble ordonné E sont dits comparables ssi a ≤ b ou b ≤ a; dans le cas contraire on dit que a et b sont <u>non-comparables</u>.

Soit E_1 un ensemble muni d'une relation d'ordre R_1, et soit E_2 un ensemble muni d'une relation d'ordre R_2. Soit λ une application de E_1 dans l'ensemble E_2.

$$\lambda : x \longmapsto \lambda(x) \qquad (x \in E_1 \ ; \ \lambda(x) \in E_2)$$

On dit que λ <u>conserve l'ordre</u> ou λ est un <u>morphisme pour l'ordre</u> ssi

$$x \underset{R_1}{\leq} y \longrightarrow \lambda(x) \underset{R_2}{\leq} \lambda(y) \quad (x \in E_1 \text{ et } y \in E_1)$$

Une bijection λ de E_1 sur E_2 est dite un <u>isomorphisme pour l'ordre</u> ssi

$$x \underset{R_1}{\leq} y \Longleftrightarrow \lambda(x) \underset{R_2}{\leq} \lambda(y) \quad (x \in E_1 \text{ et } y \in E_1)$$

S'il existe un isomorphisme de E_1 sur E_2, on dit que E_1 et E_2 sont <u>isomorphes</u>.

<u>Exercice</u>: Considérons les ensembles $A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4 \}$.
$B = \{ b_1, b_2, b_3, b_4 \}$
et $C = \{ c_1, c_2, c_3, c_4 \}$ et définissons une relation de la manière suivante:

$a_1 \leq a_2$, $a_1 \leq a_3$, $a_1 \leq a_4$, $a_3 \leq a_4$,

$b_1 \leq b_2$, $b_1 \leq b_3$, $b_1 \leq b_4$, $b_3 \leq b_4$,

$c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq c_4$.

Définissons alors les applications λ, ψ et σ comme suit:

λ: A $\rightarrow$ B; $\lambda(a_j) = b_j$ (j= 1,2,3,4)

ψ: A $\rightarrow$ B; $\psi(a_j) = \begin{cases} b_2 \text{ , si } j = 2 \\ b_1 \text{ , si } j \neq 2 \end{cases}$

σ: A $\rightarrow$ C; $\sigma(a_j) = c_j$ (j= 1,2,3,4)

Etudiez λ, ψ et σ en tant que morphismes entre A et B ou A et C.

1.6 Graphe d'un ensemble ordonné.

Les relations d'ordre sur les ensembles finis peuvent être clairement illustrées à l'aide de graphes (voir 1.2). Pour les ensembles ordonnés, on peut développer une méthode particulière qui augmente la clarté de la présentation. Avant d'exposer cette méthode nous devons introduire quelques concepts préliminaires.

Soit (a, b) un couple d'éléments d'un ensemble ordonné tel que $a < b$ et qu'il n'existe aucun élément x tel que $a < x < b$. On dit alors que les éléments a et b sont consécutifs, que a est couvert par b, ou que b couvre a. Cette situation est exprimée par le symbole $a \prec b$ (ou $b \succ a$)

Un élément a d'un ensemble ordonné E est dit minimal s'il n'existe aucun élément x de E tel que $x < a$. De même, on dit que a est un élément maximal de E si la relation $x > a$ n'est satisfaite par aucun élément x de E.

Considérons maintenant un ensemble fini E muni d'une relation d'ordre R ($\leq$). Construisons alors la figure suivante:

> Représentons chaque élément a de E par un cercle C_a dans le plan de la figure. Maintenant, pour tout couple (x, y) d'éléments de E tel que $x \prec y$, relions les cercles C_x et C_y par un segment orienté de x vers y. La figure résultante est le <u>graphe</u> de l'ensemble E relativement à l'ordre considéré.

Exemple: Considérons E= {a, b, c, d, e, f, g, h} pour lequel on a:

a < c, a < d, b < c, b < d, c < d, e < f, e < g.

ou

<	a	b	c	d	e	f	g	h
a			x	x				
b			x	x				
c				x				
d								
e						x	x	
f								
g								
h								

Il s'ensuit que: a $\prec$ c; b $\prec$ c; c $\prec$ d; e $\prec$ f; e $\prec$ g

Graphe de l'ensemble E

Les éléments a, b, e et h sont minimaux; les éléments d, f, g et h sont maximaux.

Nous mentionnons deux théorèmes importants pour lesquels on trouvera les démonstrations dans [20].

Théorème 1: Tout ensemble ordonné fini (non vide) peut être représenté par un graphe.

Théorème 2: Deux ensembles ordonnés finis peuvent être représentés par le même graphe ssi ils sont isomorphes.

Exercices:

1 Indiquer parmi les relations suivantes celles qui sont des relations d'ordre, dire si elles sont alors totales ou partielles.

"est fils de" sur H=ensemble des humains

"divise" sur N

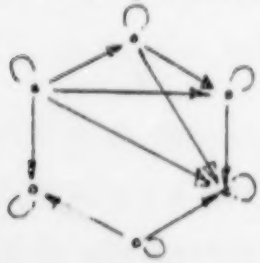
"précède dans le dictionnaire" sur M=ensemble des mots français.

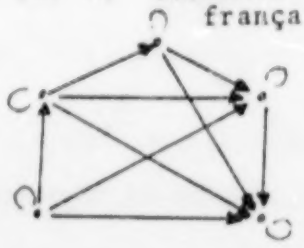
"n'a pas de facteur commun" autre que 1 — sur $\mathbb{N}$

"est perpendiculaire" — sur D: ensemble des droites du plan.

$(a,b)\ R\ (c,d) \Longleftrightarrow a \leq c$ — sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

"ne vient pas avant" — sur M: ensemble des mots français.





2 Si R est une relation d'ordre totale (resp.partiel) est-ce que R^{-1} l'est aussi?
R et R^{-1} ont-ils des graphes isomorphes?

3 Soient $(\mathbb{N}, \leq)$ et $(\mathbb{N}, \geq)$ les deux ordres naturels sur $\mathbb{N}$.
Si $\lambda : x \longrightarrow x$ est l'application identique de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, est-ce un isomorphisme pour l'ordre?

4 Même question que 3 avec $\left(\{0,2,4,\ldots,\ldots\}, \leq\right)$ et $\left(\{1,3,5,\ldots\}, \leq\right)$ où $\lambda : x \longrightarrow x+1$.

5 Dans l'exercice mentionné à la page 17 , y a-t-il des éléments non comparables dans les ordres donnés? Identifier les éléments minimaux et les éléments maximaux.

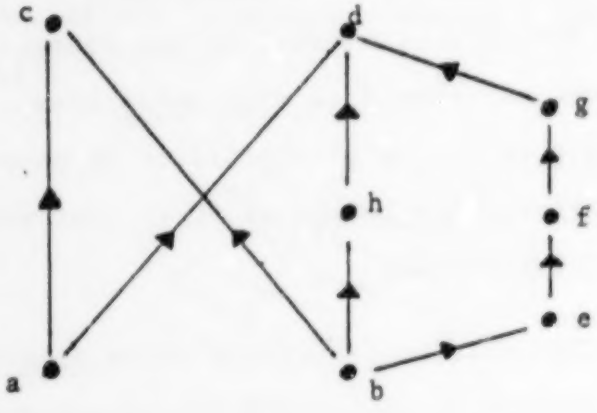
6 Un élément peut-il être minimal et maximal à la fois?
Donner un graphe illustrant votre réponse.

1.7 Bornes supérieures et inférieures.

Soit A un sous-ensemble non vide d'un ensemble ordonné E (le cas où A= E n'étant pas exclus). On dit qu'un élément m est un majorant (resp. un minorant) de A si, pour tout élément x de A, $x \leq m$ (resp. $x \geq m$).

Si A a au moins un majorant (resp. un minorant) on dit que A est une partie majorée (resp. minorée) de E; une partie majorée et minorée est dite bornée. Si A= E, il sera alors question respectivement d'un ensemble majoré , d'un ensemble minoré, d'un ensemble borné.

Exercice: Soit l'ensemble ordonné E défini comme suit:



a. Cherchons des majorants et des minorants des sous-ensembles A= {c,e,f,g} et B= {c,d}

b. Existe-t-il un sous-ensemble C de E qui puisse nous servir d'exemple d'une partie bornée?

c. Est-ce que E est un ensemble borné, majoré, minoré?

On peut montrer qu'il existe au plus un minorant du sous-ensemble A qui appartient à A lui-même:

> En effet, si deux éléments a, b de A sont des minorants de A, alors, par définition,
>
> $$a \leq b \text{ et } b \leq a$$
>
> et par suite, d'après l'antisymétrie des relations d'ordre, a= b.

La même remarque s'applique aux majorants.

Donc: S'il existe un minorant (resp. un majorant) d'un sous-ensemble A d'un ensemble ordonné E appartenant à la partie A elle-même, un tel élément est unique; cet élément est appelé le plus petit (resp. le plus grand) élément de A. Le plus petit et le plus grand élément s'appellent les bornes de A, et tout autre élément de A est dit intérieur.

exercice: Clarifier la différence entre élément minimal (maximal) et le plus petit (le plus grand) élément à l'aide de l'ensemble ordonné E donné dans l'exercice précédent.

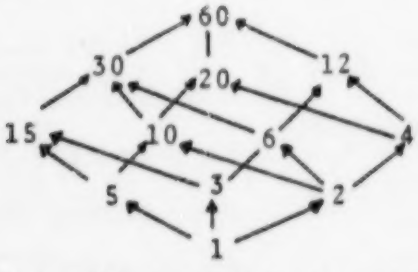
Soit de nouveau A, un sous-ensemble de l'ensemble ordonné E. Nous appellerons borne inférieure (resp. borne

supérieure) de A dans E le plus grand (resp. le plus petit) élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants (resp. des majorants) de A. - Il découle des considérations précédentes que tout sous-ensemble A de E admet au plus une borne inférieure et une borne supérieure; celles-ci sont notées $\inf_E A$, $\sup_E A$ et, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, inf A et sup A.

Exercice: a. Quelle est la borne supérieure du sous-ensemble (a, b) de l'ensemble E considéré à la page 19?

b. Existe-t-il une borne supérieure du sous-ensemble (a, b) de l'ensemble E considéré à la page 22?

c. Considérons l'ensemble ordonné E défini comme suit:



Soit A= {2,6,10} . B= {6,4} , C= {15,4}

-Trouvons les minorants (majorants) de A,B,C

-Trouvons inf A, sup A, inf B, sup B, inf C, sup C

2. Treillis.

2.1 Opérations binaires.

Soit A un ensemble non-vide. Une application f de A x A dans A

$$f: A \times A \longrightarrow A$$

$$f: (x_1 , x_2) \longrightarrow f(x_1 , x_2)$$

est appelée une opération binaire définie sur A.

Une fonction de la forme précédente est appelée une opération binaire partielle si elle n'est définie que sur une partie de A x A.

Exemples:

a) $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$+ : (a, b) \longrightarrow a + b$

b) $- : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$- : (a, b) \longrightarrow a - b$

c) $x : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$x : (a, b) \longrightarrow a \times b$

d) Considérons dans l'ensemble des points du plan réel l'opération d'associer à deux points (P_1, P_2) le point milieu du segment $\overline{P_1 P_2}$.

e) Interprétez le p.g.c.d. et le p.p.c.m. comme opérations binaires définies sur $\mathbb{N}^*$.

f) Parmi les exemples précédents, indiquez les opérations binaires qui sont partielles.

Inventez sur d'autres ensembles des opérations et des opérations partielles.

2.2 Treillis.

On appelle treillis un ensemble T muni de deux opérations binaires, $\sqcap$ et $\sqcup$, associant à tout couple (a, b) d'éléments de T les éléments $a \sqcap b$ et $a \sqcup b$, de telle sorte que les axiomes des treillis suivants soient satisfaits:

T_1 Pour tout triplet (a,b,c) d'éléments de T
$(a \sqcap b) \sqcap c = a \sqcap (b \sqcap c)$.

T_2 Pour tout triplet (a,b,c) d'éléments de T
$(a \sqcup b) \sqcup c = a \sqcup (b \sqcup c)$.

T_3 Pour tout couple (a,b) d'éléments de T
$a \sqcap b = b \sqcap a$

T_4 Pour tout couple (a,b) d'éléments de T
$a \sqcup b = b \sqcup a$

T_5 Pour tout couple (a,b) d'éléments de T
$a \sqcap (a \sqcup b) = a$

T_6 Pour tout couple (a,b) d'éléments de T
$a \sqcup (a \sqcap b) = a$

Autrement dit, dans un treillis, les deux opérations sont associatives et commutatives; les propriétés T_5 et T_6 sont appelées les identités d'absorption de $\sqcap$ et de $\sqcup$.

Ces axiomes ont comme conséquences:

Théorème 3:

T_7 Tous les éléments de T sont idempotents pour $\sqcap$:

$a \sqcap a = a$

T_8 Tous les éléments de T sont idempotents pour $\sqcup$:

$a \sqcup a = a$

et pour tout couple (a, b) d'éléments d'un treillis

$a \sqcap b = a \sqcup b$ ssi $a = b$.

Démonstration: Nous démontrons ci-après T_7. La démonstration de T_8 est analogue.

D'après T_6, pour tout couple (a, x) d'éléments de T,

$a \sqcap a = a \sqcap (a \sqcup (a \sqcap x))$.

D'autre part, en appliquant T_5 au cas où $b = a \sqcap x$, nous obtenons

$a \sqcap (a \sqcup (a \sqcap x)) = a$

T_7 est ainsi démontré.

Pour démontrer l'équivalence $a \sqcap b = a \sqcup b$ ssi $a = b$ nous faisons les deux étapes suivantes:

a) Soit $a = b$, alors, d'après T_7 et T_8,

$a \sqcap b = a = a \sqcup b$

b) Soit $a \sqcap b = a \sqcup b$, alors d'après T_3 et T_4,

$b \sqcap a = b \sqcup a$ et ainsi

$$a \overset{T_6}{=} a \sqcup (a \sqcap b) = a \sqcup (a \sqcup b) \overset{T_2}{=} (a \sqcup a) \sqcup b \overset{T_8}{=} a \sqcup b$$

$$b \overset{T_6}{=} b \sqcup (b \sqcap a) = b \sqcup (b \sqcup a) \overset{T_2}{=} (b \sqcup b) \sqcup a \overset{T_8}{=} b \sqcup a$$

Donc, d'après T_4, $a = b$.

Exercice: chercher sur les ensembles ou sur les nombres des opérations telles que les éléments ne soient pas tous idempotents.

Exemples de treillis:

a) Soit E= {a, b, c, d} . Considérons l'ensemble puissance P (E) de l'ensemble E. Interprétons alors

$\sqcap$: comme intersection $\cap$ et

$\sqcup$: comme réunion $\cup$

de deux éléments de P(E). Montrez que (P(E), $\cap$, $\cup$) est un treillis.

b) Considérons $\mathbb{N}^*$, l'ensemble des nombres naturels non nuls. Interprétons alors

$\sqcap$: comme p.g.c.d. et

$\sqcup$: comme p.p.c.m.

de deux éléments de $\mathbb{N}^*$. Montrez que $(\mathbb{N}^*, \sqcap, \sqcup)$ est un treillis.

Exercices: a) l'ensemble ordonné donné en exercice c. p. 24 peut-il être un treillis si les lois $\sqcap$ et $\sqcup$ sont définies ainsi $x \sqcap y = \inf(x, y)$ $x \sqcup y = \sup(x, y)$

b) même question pour l'exercice de la page 22.

c) même question pour le graphe de la page 13.

2.3 Demi-treillis.

Un ensemble D est un demi-treillis s'il est muni d'une opération binaire $\circ$ qui associe à tout couple (a, b) d'éléments de D un élément $a \circ b$ de telle sorte que

D_1 L'opération $\circ$ est associative:

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de D.

D_2 L'opération $\circ$ est commutative:

$a \circ b = b \circ a$

pour tout couple (a, b) d'éléments de D.

D_3 Tout élément de D est idempotent:

$a \circ a = a$

pour tout élément a de D.

Ainsi, tout treillis T peut être interprété comme demi-treillis si l'on se restreint à l'une des deux opérations $\sqcup$ ou $\sqcap$.

Exercices:

a) le graphe de la p. 22 est-il un demi-treillis? (Dans l'affirmative, préciser pour quelle loi).

b) chercher dans les ensembles, des opérations qui conduisent à des demi-treillis.

c) existe-t-il des opérations sur les nombres (N,Z,...) qui conduisent à des demi-treillis?

d) est-ce que $\langle N, * \rangle$ est un demi-treillis, où $a * b = \frac{a + b}{2}$?

e) Vérifier que $\langle N^+, \text{p.g.c.d} \rangle$ est un demi-treillis.

f) Vérifier que $\langle N^+, \text{p.p.c.m} \rangle$ est un demi-treillis.

g) $\langle P(A), \rangle$ est-il un demi-treillis?

2.4 Treillis, en tant qu'ensemble ordonné.

On peut définir sur tout treillis une relation d'ordre de manière naturelle, en se servant des opérations sur les treillis:

Théorème 4:

Soit T un treillis. La formule

$$a \leq b \longleftrightarrow a \sqcap b = a \quad (a \in T \text{ et } b \in T)$$

définit une relation d'ordre dans T.

Démonstration: Nous devons montrer que la relation $\leq$ ainsi définie, est réflexive, antisymétrique et transitive.

a) $\leq$ est réflexive.

En effet, pour tout élément $a \in T$ on a, d'après T_7, $(a \sqcap a = a) \Longrightarrow a \leq a$, pour tout $a \in T$.

b) $\leq$ est antisymétrique:

On a $(a \leq b \text{ et } b \leq a) \Longrightarrow (a \sqcap b = a \text{ et } b \sqcap a = b)$

Selon T_3, $a \sqcap b = b \sqcap a$, donc $a = b$.

c) $\leq$ est transitive:

Soit $a \leq b$ et $b \leq c$. Alors $a \sqcap b = a$ et $b \sqcap c = b$.

Ensuite on montre:

$$a \sqcap c = (a \sqcap b) \sqcap c \overset{T_1}{=} a \sqcap (b \sqcap c)$$
$$= a \sqcap b \qquad = a$$

Donc $a \sqcap c = a$; d'où $a \leq c$

Le théorème 4 est ainsi démontré.

Remarques:

a) Dans le cas d'un treillis T on appellera la relation définie par le théorème 4 la relation d'ordre du treillis T. Cet ordre aurait pu être défini de la manière suivante:

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \sqcup b = b \quad (a \in T \text{ et } b \in T)$$

Nous ne démontrerons pas cette affirmation ici (voir (13)). Nous l'indiquons parce que nous

l'utiliserons éventuellement pour des raisons de commodité.

b) Au cours de la démonstration du théorème 4 nous n'avons utilisé que les propriétés de l'opération $\sqcap$. L'énoncé du théorème reste donc valable pour tout demi-treillis, dont l'opération est notée $\sqcap$.

Théorème 5:

Relativement à l'ordre défini au théorème 4, toute paire $\{a, b\}$ d'éléments du treillis T a une borne inférieure et une borne supérieure, à savoir

$$\inf_T (a, b) = a \sqcap b \text{ et } \sup_T (a, b) = a \sqcup b$$

Démonstration: L'énoncé du théorème 5 peut être détaillé de la manière suivante: Pour toute paire $\{a, b\} \in T$,

(i) $a \sqcap b \leq a \leq a \sqcup b$
$a \sqcap b \leq b \leq a \sqcup b$

(ii) $(u \leq a \text{ et } u \leq b) \Longrightarrow u \leq a \sqcap b$

(iii) $(a \leq u \text{ et } b \leq u) \Longrightarrow a \sqcup b \leq u$

Nous montrons d'abord (i):

1. $\underline{(a \sqcap b) \sqcap a} \overset{T_1}{=} a \sqcap (b \sqcap a)$

$\overset{T_3}{=} a \sqcap (a \sqcap b)$

$\overset{T_1}{=} (a \sqcap a) \sqcap b$

$\overset{T_7}{=} \underline{a \sqcap b}$

Donc, $a \sqcap b \leq a$

2. $\underline{(a \sqcap b) \sqcap b} \overset{T_1}{=} a \sqcap (b \sqcap b)$

$\overset{T_7}{=} \underline{a \sqcap b}$

Donc, $a \sqcap b \leq b$

3. $\underline{a \sqcup (a \sqcup b)} \overset{T_2}{=} (a \sqcup a) \sqcup b$

$\overset{T_8}{=} \underline{a \sqcup b}$

Donc, $a \leq a \sqcup b$

4. $b \sqcup (a \sqcup b) \overset{T_2}{=} (b \sqcup a) \sqcup b$

$\overset{T_4}{=} (a \sqcup b) \sqcup b$

$\overset{T_2}{=} a \sqcup (b \sqcup b)$

$\overset{T_8}{=} a \sqcup b$

Donc, $b \leq a \sqcup b$

Ensuite nous montrons (ii):

$$(u \leq a \text{ et } u \leq b) \xrightarrow{\text{déf}} u \sqcap a = u \text{ et } u \sqcap b = u$$

Alors on a:

$$\underline{u \sqcap (a \sqcap b)} \overset{T_1}{=} (u \sqcap a) \sqcap b = u \sqcap b = \underline{u}$$

Donc, $u \leq a \sqcap b$

Finalement nous montrons (iii):

$$(a \leq u \text{ et } b \leq u) \xrightarrow{\text{déf}} a \sqcup u = u \text{ et } b \sqcup u = u$$

Alors on a:

$$(a \sqcup b) \sqcup u \overset{T_2}{=} a \sqcup (b \sqcup u) = a \sqcup u = \underline{u}$$

Donc, $a \sqcup b \leq u$

Le théorème 5 est ainsi démontré.

Les théorèmes 4 et 5 montrent alors que tout treillis T, défini comme au paragraphe 2.2, est un ensemble ordonné tel que toute paire d'éléments de T ait une borne inférieure et borne supérieure. Réciproquement on a:

Théorème 6:

Soit P un ensemble ordonné tel que toute paire (a, b) d'éléments de P ait une borne inférieure et une borne supérieure, alors P est un treillis dont les opérations binaires sont $a \sqcap b = \inf_p (a, b)$ et $a \sqcup b = \sup_p (a, b)$.

Démonstration: Pour démontrer le théorème 6 nous devons montrer que les opérations inf et sup satisfont aux axiomes T_1 à T_6.

(i) D'abord ces opérations sont commutatives, ce qui assure T_3 et T_4.

(ii) Pour montrer les identités d'absorption (T_5 et T_6) nous considérons que

$$\inf \{a, b\} \leq a \leq \sup \{a, b\}$$

et alors

$$a \sqcap (a \sqcup b) = \inf \{a, \sup \{a, b\}\} = a \text{ et}$$
$$a \sqcup (a \sqcap b) = \sup \{a, \inf \{a, b\}\} = a$$

Ainsi T_5 et T_6 sont assurés.

(iii) Il nous reste à démontrer que les opérations inf et sup sont associatives (T_1 et T_2).
Ici, nous démontrerons T_1 seulement.
(T_2 se démontrera de façon analogue)
Pour que T_1 soit satisfait nous devons montrer:

$$(a \sqcap b) \sqcap c = \inf \{\inf \{a,b\}, c\} = \inf \{a, \inf \{b,c\}\} = a \sqcap (b \sqcap c$$

pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de P.

Nous poursuivons la stratégie suivante: on montrera

(*) $\inf \{\inf \{a,b\}, c\} = \inf \{a, b, c\}$ et

(**) $\inf \{a, \inf \{b, c\}\} = \inf \{a, b, c\}$

Remarque: Bien que non assuré par le théorème 5 inf {a, b, c} et sup {a, b, c} existent, ce qui est démontré d'une façon analogue au théorème 5.

Montrons d'abord (*):

inf {inf {a, b,} , c} ≤inf {a, b} ≤ a, b

et inf {inf {a, b} , c}≤ c; il en suit

inf {inf {a, b) , c} ≤ a, b, c.

De plus on a inf {a, b, c}≤ a, b, c; donc

(1) inf {inf {a, b) , c}≤ inf {a, b, c} , car inf {a,b,c} est le plus grand des minorants de {a,b,c}

Ensuite: inf {a, b, c} ≤ a, b et inf {a, b} ≤ a, b

donc inf {a, b, c} ≤ inf {a, b} , car inf {a, b} est le plus grand des minorants de {a, b} et

inf {a, b, c} ≤ c, donc

inf {a, b, c} ≤ inf {a, b} , c.

De plus on a: inf {inf {a, b} , c} ≤ inf {a, b}, c

donc

(2) inf {a, b, c} ≤ inf {inf {a, b}, c} car inf {inf {a, b}, c} est le plus grand des minorants de{inf {a, b), c}

(1) et (2) d'après l'antisymétrie de ≤ donnent

inf {inf {a, b) , c}= inf {a, b, c} ,

ce qui démontre (*). De même on montre (**).

(*) et (**) assurent par la transitivité de l'égalité:

$$(a \sqcap b) \sqcap c = \inf \{\inf \{a, b,\} c\}$$
$$= \inf \{a, \inf \{b, c\}\}$$
$$= a \sqcap (b \sqcap c) \text{ et ainsi}$$

T_1 est démontré.

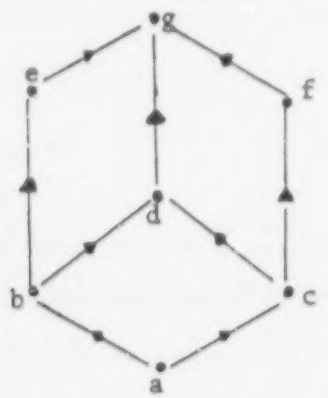
Le théorème 6 nous assure alors que nous pouvons nous servir de deux définitions équivalentes du treillis: d'une part en tant qu'ensemble T muni de 2 opérations binaires $\sqcap$ et $\sqcup$ satisfaisant aux axiomes T_1 à T_6 et d'autre part en tant qu'ensemble ordonné T tel que toute paire d'éléments de T a une borne supérieure et une borne inférieure. Dans nos considérations ultérieures, nous utiliserons l'une ou l'autre de ces définitions.

2.5 Graphes des treillis.

Tout treillis fini T - étant un ensemble ordonné fini - peut être représenté par un graphe, appelé le graphe du treillis T. Tout treillis fini est déterminé par son graphe, à un isomorphisme près. Le maniement du graphe d'un treillis est très commode parce qu'il nous fournit la relation d'ordre $\leq$ et les deux opérations $\sqcap$, $\sqcup$ à la fois.

Exemple:

a) Voici le graphe d'un treillis



a_1) Quelle est la relation d'ordre de ce treillis?

$\leq$	a	b	c	d	e	f	g
a							
b							
c							
d							
e							
f							
g							

a_2) Quelles sont les opérations binaires $\sqcap$, $\sqcup$ de ce treillis?

$\sqcap$	a	b	c	d	e	f	g
a							
b							
c							
d							
e							
f							
g							

$\sqcup$	a	b	c	d	e	f	g
a							
b							
c							
d							
e							
f							
g							

b) Soit T = {a, b, c, d, e, f, g, h }.

Dans T sont définies les opérations $\sqcap$ et $\sqcup$ comme suit:

$\sqcap$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	b	b	b	b	b
c	a	a	c	c	c	c	c	c
d	a	b	c	d	d	d	d	d
e	a	b	c	d	e	d	e	e
f	a	b	c	d	d	f	f	f
g	a	b	c	d	e	f	g	g
h	a	b	c	d	e	f	g	h

$\sqcup$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	a	b	c	d	e	f	g	h
b	b	b	d	d	e	f	g	h
c	c	d	c	d	e	f	g	h
d	d	d	d	d	e	f	g	h
e	e	e	e	e	e	g	g	h
f	f	f	f	f	g	f	g	h
g	g	g	g	g	g	g	g	h
h	h	h	h	h	h	h	h	h

Est-ce que $(T, \sqcap, \sqcup)$ est un treillis?

Quel est la relation d'ordre définie à partir de ce treillis?

Tracez le graphe de ce treillis.

2.6 Sous-treillis.

On appelle sous-treillis d'un treillis T tout sous-ensemble R de T tel que:

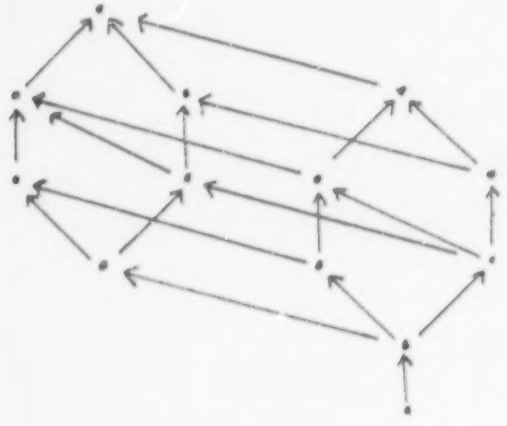
$(a \in R \text{ et } b \in R) \Longrightarrow (a \sqcap b \in R \text{ et } a \sqcup b \in R)$

Il est clair que les axiomes T_1 à T_6 sont encore satisfaits pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de R. Il s'ensuit que tout sous-treillis d'un treillis T est un treillis relativement aux opérations définies dans T.

Exemple: Soit A= {a, b, c} E= {a, b, c, d} (voir p. 28).
Formons le treillis $(P(A), \cap, \cup)$.
Alors $(P(A) \cap, \cup)$ est un sous-treillis de $(P(E) \cap, \cup)$.

Exercices: a) Donnez un exemple d'un sous-treillis du treillis $(N^*, \sqcap, \sqcup)$ - voir page 24 - où $\sqcap$ veut dire p.g.c.d. et $\sqcup$ veut dire p.p.c.m.

b) Donner quelques sous-treillis du treillis suivant:



Chapitre II

La formalisation du concept de groupement par WITTMANN-STEINER; Groupements de treillis.

1. Le travail de base de E WITTMANN.

En 1972, E. WITTMANN publie un t.avail [21,27] par lequel il prétend présenter une formalisation saine et orientée vers l'application du concept de groupement qui rend justice à la conception originale de PIAGET.

a) Définition du concept de groupement (de treillis).
Un groupement (de treillis) est un quintuplet

$$(M, M \times M, \Delta, \circ, \trianglelefteq)$$

qui est décrit par les propriétés suivantes:

(1) M est un ensemble non-vide, dont les éléments sont appelés des états et qui sont symbolisés par a, b, ...

(2) M x M est défini comme produit cartésien de M. Ses éléments sont appelés des opérations.

(3) $\circ$ est la composition partielle définie canoniquement par

$$(a, b) \circ (b, c) = (a, c)$$

(4) Δ est un sous-ensemble de M x M; ses éléments sont appelés des opérations élémentaires.

(5) $\trianglelefteq$ est une relation binaire dans M qui est définie, à l'aide de Δ comme suit:

$$(*)\quad a \trianglelefteq b \iff \begin{cases} a = b \text{ ou} \\ \text{il existe } (a, x_1), \ldots, (x_n, b) \in \Delta \text{ tels que} \\ (a, b) = (a, x_1) \circ \ldots \circ (x_n, b). \end{cases}$$

(6) Les composants de $(M, M \times M, \Delta, \circ, \trianglelefteq)$ satisfont aux conditions suivantes:

(i) $M \times M$ est engendré par $\Delta \cup \Delta^{-1}$ par rapport à $\circ$.

(ii) $(M, \trianglelefteq)$ est un treillis.

Si, au lieu de (ii), on a que

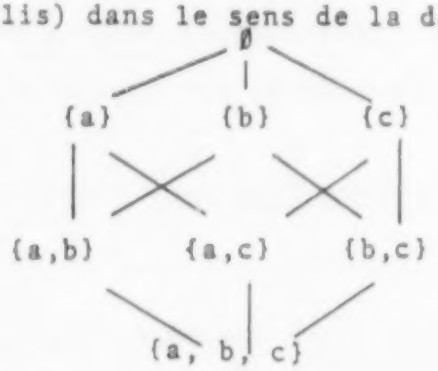
(ii)' $(M, \trianglelefteq)$ est un demi-treillis

alors $(M, M \times M, \Delta, \circ, \trianglelefteq)$ est un <u>groupement</u> (de treillis) <u>faible</u>.

<u>Remarque</u>: On trouve cette définition (dans la forme donnée ici) chez H.G. STEINER [19]

b) Exemples.

1. Voici le graphe d'un treillis. Interprétons ce graphe en tant que représentation d'un groupement (de treillis) dans le sens de la définition précédente.



2. Faisons de même pour le graphe d'un treillis dans l'ensemble des hexagones (matériel concret).

3. Vérifier que $\trianglelefteq$ est la fermeture réflexo transitive de Δ

2. Des précisions de H.-G. STEINER.

Dans sa publication [19]STEINER montre que la définition de WITTMANN peut être formulée de manière plus élégante comme suit:

Théorème 7:

Soit M un ensemble qui contient plus d'un élément. Soit Δ une relation binaire dans M et soit $\trianglelefteq$ la fermeture réflexo-transitive de Δ . (M, Δ) est un groupement [de treillis) ssi (M, $\trianglelefteq$) est un treillis.

Démonstration: Voici les grandes lignes de la démonstration de STEINER.

a) Le lien entre Δ et $\trianglelefteq$ défini par (5) ne signifie autre chose que $\trianglelefteq$ est la fermeture réflexo-transitive de Δ .

b) Par (6), (ii) nous savons que $\trianglelefteq$ est alors un ordre tel que pour toute paire (a, b) d'éléments de M il existe $a \sqcup b$ et $a \sqcap b$.

c) (6), (i) est alors une conséquence de (6), (ii). Ceci est déduit de la propriété que pour tout couple (a, b)$\in$ M x M il existe $a \sqcup b$ et que $a \trianglelefteq a \sqcup b$ et $b \trianglelefteq a \sqcup b$.

d) Finalement on montre que toutes les données et propriétés de (1) à (6) peuvent être déduites de la définition précédente.

Remarque: La propriété (6) (i) de la définition de WITTMANN signifie que l'on peut aller d'un élément quelconque a de M à un élément quelconque b de M en suivant seulement des flèhces de Δ ou de Δ^{-1}. STEINER montre alors que cette propriété est vérifiée dans tout treillis.

Démonstration du point c):

Soit $(a, b) \in M \times M \xrightarrow{(6)\ (ii)} a \sqcup b$; et $\begin{matrix} a \trianglelefteq a \sqcup b \\ b \trianglelefteq a \sqcup b \end{matrix}$; explicitement:

$$\text{et} \quad \begin{matrix} a = a \sqcup b \text{ ou } a \vartriangleleft a \sqcup b \\ b = a \sqcup b \text{ ou } b \vartriangleleft a \sqcup b \end{matrix}$$

(i) Soit $a \vartriangleleft a \sqcup b$ et $b \vartriangleleft a \sqcup b \xrightarrow{(5)}$

$\exists (a, x_1) \ldots (x_n, a \sqcup b) \in \Delta$ tels que

$(a, a \sqcup b) = (a, x_1) \circ \ldots \circ (x_n, a \sqcup b)$ et

$\exists (b, y_1), \ldots, (y_m, a \sqcup b) \in \Delta$ tels que

$(b, a \sqcup b) = (b, y_1) \circ \ldots \circ (y_m, a \sqcup b)$

ce qui signifie que $(a, a \sqcup b)$ est engendré par Δ et que $(a \sqcup b, b)$ est engendré par Δ^{-1}. Donc

$(a, b) = (a, a \sqcup b) \circ (a \sqcup b, b)$ est engendré par $\Delta \cup \Delta^{-1}$.

(ii) Soit $a = a \sqcup b$ et $b \trianglelefteq a \sqcup b$. En conséquence $b \trianglelefteq a$.
$\xrightarrow{(5)}$ (b, a) est engendré par Δ et (a, b) engendré par Δ^{-1}

(iii) Soit $a \trianglelefteq a \sqcup b$ et $b = a \sqcup b$. En conséquence $a \trianglelefteq b$.
$\xrightarrow{(5)}$ (a, b) est engendré par Δ

(iv) Soit finalement $a = b$ et soit c un autre élément de M.
D'après ce qui précède, (a, c) et (c, a) sont engendrés par
$\Delta \cup \Delta^{-1}$ donc
$(a, a) = (a, c) \circ (c, a)$ est engendré par $\Delta \cup \Delta^{-1}$.

Cette définition du concept de groupement (de treillis) a été généralisée récemment par E. WITTMANN à l'aide du concept de catégorie [1]. Cette nouvelle formulation contient la définition précédente comme cas spécial. Nous continuons d'abord à explorer davantage ce cas spécial: le concept de groupement de treillis.

3. Comparaison des propriétés élaborées par WITTMANN-STEINER avec celles données originalement par PIAGET.

Nous discutons brièvement les ressemblances et les différences entre les deux formalisations.

I La possibilité de composer des opérations demandée par PIAGET par 1^{o} (page 3) est donnée dans la définition de WITTMANN-STEINER par

$$(a, b) \circ (b, c) = (a, c)$$

Cependant, cette composition n'est que partielle.

1: E. WITTMANN, Natural numbers and groupings, Educational Studies in Mathematics, 6, (1975), 53-75.

II Cette composition $\circ$ est <u>associative</u> telle que demandée par PIAGET par 3°.

III La <u>réversibilité</u> des opérations (2°) est assurée par

$$((a, b) \circ (b, c)) \circ (c, b) = (a, b)$$

IV <u>L'opération identique générale</u> (4°) est donnée par

(i) $(a, b) \circ (b, a) = (a, a)$ pour tout $(a, b) \in M \times M$

(ii) $(a, b) \circ (b, b) = (a, b)$

V <u>La tautologie</u> s'exprime à l'aide $\sqcap$ ou $\sqcup$ en tant que

$$a \sqcap a = a \quad \text{ou} \quad a \sqcup a = a.$$

Comme différence particulière nous remarquons ici que nous faisons face à 2 opérations $\circ$ et $\sqcap$ alors que chez Piaget, seule l'opération $+$, est employée.

PIAGET même a indiqué que les groupements sont une sorte d'hybride entre des groupes et des treillis: en effet $(M \times M, \circ)$ est un <u>groupe partiel</u>[1], si l'on identifie les opérations identiques; $(M, \leq)$ est <u>un treillis</u> (ou demi-treillis).

Dans un groupement de treillis, l'ensemble Δ des opérations élémentaires semble jouer un rôle très important. Δ joue essentiellement deux rôles.

---

1. $(E, +)$ est un groupe partiel, si $+$ est une composition partielle qui est associative, pour laquelle il existe un élément neutre et pour laquelle les solutions de $x + a = b$ ou $a + y = b$ sont uniques, si elles existent.

(i) toute opération est un produit d'opérations élémentaires ou de leurs inverses; Δ est donc "à la base" de toute opération;

(ii) les opérations élémentaires définissent la relation d'ordre $\trianglelefteq$ dans M.

Dans nos travaux de recherche, nous nous proposons en particulier de rechercher l'importance didactique de Δ pour la formation de groupements de treillis.

Chapitre III

Classification de groupements - Opérations fondamentales de la pensée.

A la suite de sa formalisation originale, PIAGET énumère les principaux groupements en précisant que ces structures "représentent simplement la structure terminale de l'intellignece et que le problème reste entier de comprendre leur formation"[1].

Quant à la formation de groupements WITTMANN interprète PIAGET comme suit:[2]

"Le comportement d'un individu dans une situation comprenant un ensemble d'états est d'autant plus efficace que l'individu peut exécuter activement avec flexibilité la composition des opérations décrite par 1^{o} à 5^{o}".
"La capacité d'un individu d'élaborer un groupement dans une situation augmente au cours de son développement. D'abord le succès est restreint à l'élaboration de fragments de groupements caractérisés par des "petits" sous-ensembles de M, M x M et Δ et par un manque de mobilité. Par la composition répétée d'opérations disponibles, de nouveaux états et de nouvelles opérations sont engendrés jusqu'à l'élaboration complète (finale et idéale) du groupement, l'état d'équilibre. Le

...

1. Voir J. Piaget, [16], page 50.
2. Voir E. Wittmann, Natural Numbers and Groupings, Educational Studies in Mathematics, 6, 1975, page 56.

"principe opératoire" de la théorie d'enseignement demande alors de favoriser la formation de groupements par l'organisation adéquate de situations d'apprentissage."

Dans ce qui suit nous étudierons les différents types de groupements d'après la classification déjà indiquée par PIAGET. Cependant, nous formulerons les divers types de groupements, de même que des exemples variés dans le nouveau langage qui est maintenant disponible, et cela, en nous servant ou bien de la définition de WITTMANN ou bien de celle de STEINER. Les considérations en ce qui a trait à l'organisation de situations d'apprentissage favorisant la formation de groupements seront réservées plutôt pour le chapitre IV.

PIAGET partage sa liste de groupements en deux parties principales: les groupements logiques et les groupements infra-logiques. Nous traiterons d'abord les groupements logiques.

1. Groupements logiques.

1.1 Les groupements logiques de l'inclusion.

PIAGET appelle ainsi ce type le plus simple et l'indique par "l'emboîtement hiérarchique des classes". Selon la notation de STEINER nous l'exprimons comme suit:

Soit E un ensemble fini non-vide. Soit P(E) l'ensemble puissance de E. Alors on définit Δ comme suit:

$$\Delta = \{(A, B) \;/\; A, B \in P(E) \text{ et } A \overset{c}{\neq} B\}$$

La fermeture réflexo-transitive de Δ est la relation d'inclusion $\subseteq$. $(P(E), \subseteq)$ est un treillis bien connu, donc $(P(E), \Delta)$ est un groupement, <u>groupement logique de l'inclusion</u>.

<u>Remarques</u>: (i) Le choix de Δ dans le groupement $(P(E), \Delta)$ ci-haut n'est pas unique. Ici Δ peut être choisi tel:

$\Delta'' = \{(A, B) / A, B \in P(E) \text{ et } A \subseteq B\} = \measuredangle$

et tel qu'il inclut

$\Delta' = \{(A, B) / A, B \in P(E) \text{ et } \text{card}(B \setminus A) = 1\}$

(ii) Dans sa publication [24] WITTMANN appelle ces groupements des <u>groupements booléens</u>.

Dans la formulation de WITTMANN, nous parlerons du groupement $(P(E), P(E) \times P(E), \Delta, \circ, \subseteq)$, où $P(E)$ est l'ensemble des <u>états</u>, $P(E) \times P(E)$ est l'ensemble des <u>opérations</u>, Δ est l'ensemble des <u>opérations élémentaires</u> telles que définies plus haut. $\subseteq$ est alors la fermeture réflexo-transitive de Δ . Pour toute opération (X, Y) on trouve alors des éléments de Δ ou de Δ^{-1} qui les engendrent:

$$(*)\quad (X, Y) = \underbrace{(X, X \cap Y)}_{\in \Delta^{-1}} \circ \underbrace{(X \cap Y, Y)}_{\in \Delta}$$

ou

$$(**)\quad (X, Y) = \underbrace{(X, X \cup Y)}_{\in \Delta} \quad \underbrace{(X \cup Y, Y)}_{\in \Delta^{-1}}$$

Des exemples de tels groupements ne sont pas rares: tout matériel dont on peut se servir pour concrétiser des concepts ensemblistes (sous-ensemble, intersection, réunion, complément etc.) peut donner lieu à un tel groupement. Plus particulièrement $(P(L), \subseteq)$, ou L est l'ensemble des blocs logiques, en est un exemple concret.

Pour la compréhension de ce type de groupement nous nous intéressons plus particulièrement aux <u>actions</u> qui s'intériorisent en des <u>opérations élémentaires</u>. WITTAMANN les décrit par deux composantes:

(i) la <u>discrimination</u> (séparation) d'un sous-ensemble A de E (décomposition de E dans A et $\overline{A}$).

(ii) la <u>variation</u> du sous-ensemble séparé A (agrandissement ou diminution)

Une opération élémentaire $(A, B) \in \Delta$ est intériorisée à partir de l'action

(i) de séparer A de E (exemple: chercher tous les cercles rouges dans L)

(ii) d'adjoindre aux éléments de A tous les éléments de $B \setminus A$. (exemple: adjoindre aux cercles rouges tous les autres rouges)

Après cette action, l'ensemble B est séparé et E est partagé en B et $\overline{B}$ (pour l'exemple donné, l'ensem-

ble des blocs rouges est alors séparé). - D'une façon analogue, l'action de diminution s'intériorise en des opérations de Δ^{-1}.

Sujet de discussion: WITTMANN dit que les opérations ensemblistes comme l'intersection de deux ensembles, la réunion de deux ensembles disjoints et la différence B\ A (si A $\subseteq$ B) sont des opérations engendrées immédiatement par les actions décrites plus haut. Par contre, la réunion et la différence de deux ensembles quelconques sont des composés d'opérations élémentaires. Ne serait-il pas opportun de tenir compte de ce fait lors de l'apprentissage de ces concepts et de relier davantage la réunion et la différence de deux ensembles quelconques à la relation d'inclusion?

Indications: Soit $\oplus$ la réunion de sous-ensembles disjoints de E; soit $B \ominus A \overset{déf}{=} B \backslash A$ si $A \subseteq B$.

Alors on a:

(i) $\big((A, B) \in \Delta$ ou $A = B\big) \longleftrightarrow A \subseteq B \longleftrightarrow \exists\, C \in P(E)$ tel que $A \oplus C = B$

(ii) $B \setminus A = B \ominus (B \cap A)$ pour tout $(A, B) \in P(E) \times P(E)$

(iii) $A \cup B = A \oplus (B \ominus (B \cap A))$ pour tout $(A, B) \in P(E) \times P(E)$

1.2 Groupements logiques de substitution.

Soit E un ensemble fini non-vide; soit M l'ensemble des décompositions de E en classes disjointes (non-vides). Un élément Z de M est alors un ensemble de classes disjointes (non-vides), $Z = \{K_1, \ldots, K_n\}$, dont la réunion constitue l'ensemble E. L'ensemble Δ des opérations élémentaires est défini par:

$\Delta = \{(Z, T) \in M \times M$ / T s'obtient de Z en décomposant une classe de Z en deux classes disjointes non-vides$\}$

Les éléments de Δ sont dits les opérations élémentaires de raffinage. La relation $\trianglelefteq$ engendrée par Δ en tant que fermeture réflexo-transitive est une relation d'ordre (elle est également antisymétrique). $Z \sqcup T$ est la décomposition la moins fine comprenant Z et T; $Z \sqcap T$ est la décomposition la plus fine qui est contenue dans Z et T. $\sqcup$ et $\sqcap$ existent et sont uniques. $(M, \trianglelefteq)$ est alors un treillis et (M, Δ) est un groupement, un groupement de substitution.

Un premier exemple d'un tel type de groupements logiques est un ensemble de "cartes d'ensembles":

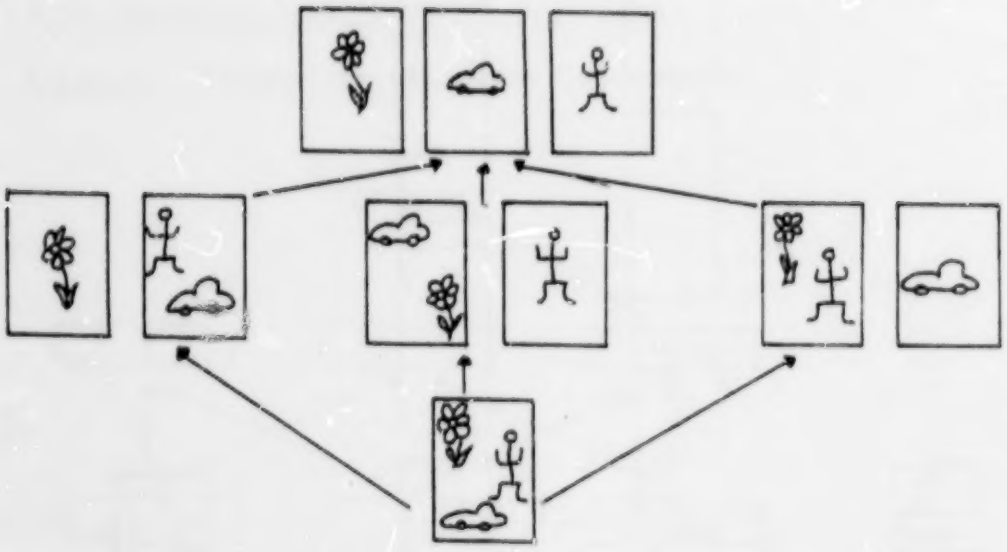


Figure 1

Construisez un groupement de substitution analogue à partir d'un ensemble de 4 éléments.

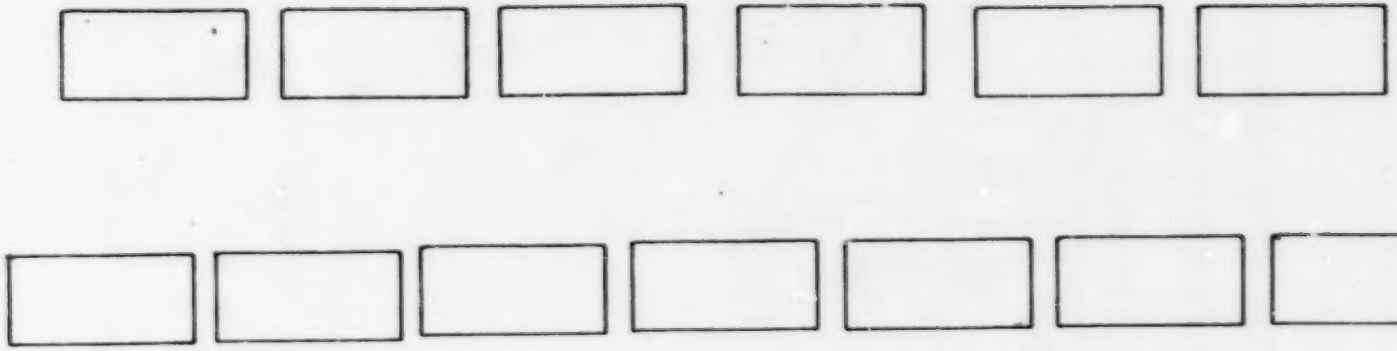


Figure 2

Au cas où E est totalement ordonné, nous recevons un groupement de substitution correspondant si nous définissons M en tant qu'ensemble de décompositions de E en sections disjointes et non-vides.

Exemple: "Tapis" de réglettes Cuisenaires.

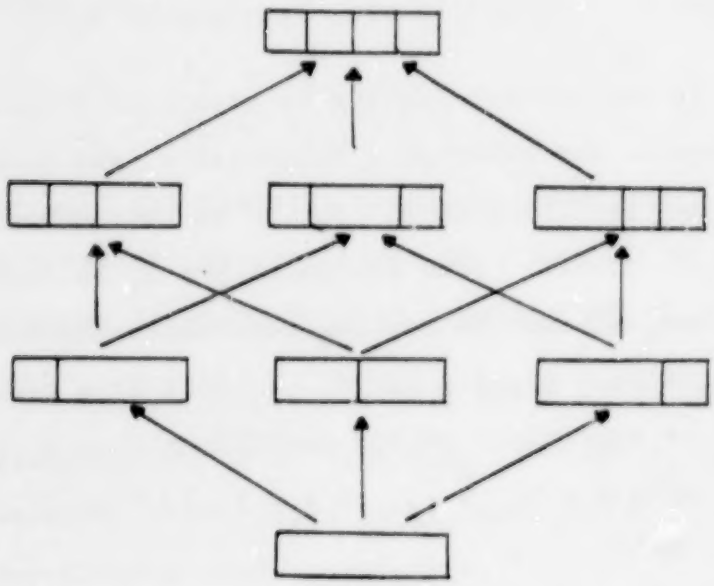


Figure 3

Une opération élémentaire de Δ consiste ici à partager une section donnée en deux sections disjointes et non-vides. On trouve des exemples de tels groupements en abondance. L'importance de ces groupements, particulièrement en arithmétique, est évidente.

1.3 Groupements logiques de superposition complète de partitions (Multiplication bi-univoque de classes)[1].

Soit L un ensemble fini, non-vide. Soient E_1, ..., E_n des ensembles d'attributs dont chacun induit une partition de L (par rapport à la relation d'équivalence p_i: "avoir le même attribut en E_i".)

La conjonction logique de relations d'équivalence est encore une relation d'équivalence, qui induit encore une partition de L. Soit S un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Nous désignons par Z_S la partition de L qui est induite par la conjonction des relations d'équivalence données par S. Z_S doit être considérée comme la superposition des partitions $Z_j = Z_{\{j\}}$, $j \in S$. Nous supposons $Z_S \neq Z_T$, si $S \neq T$, $S, T \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Soit alors

$$M = \{Z_S \;/\; S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

Sur M nous définissons une relation Δ comme suit:

$$\Delta = \{(Z_S, Z_T) \;/\; S \subseteq T \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, \text{card}\,(T \setminus S) = 1\}$$

Les éléments de Δ sont appelés des <u>discriminations élémentaires</u>; ceux de Δ^{-1} des <u>abstractions élémentaires</u>. La relation $\blacktriangleleft$ engendrée en tant que fermeture réflexo-transitive de Δ se lit alors:

---

1. Beth et Piaget, <u>Epistémologie Mathématique et Psychologie</u>, Et. Ep. Génét., Vol XIV, Paris, 1961, page 188.

$Z_S \trianglelefteq Z_T \hookrightarrow Z_T$ discrimine plus finement que Z_S ou est égal à Z_S.

Nous vérifions que $(M, \trianglelefteq)$ est un ensemble ordonné. Pour toute paire d'éléments de M nous définissons alors une borne supérieure et une borne inférieure comme suit:

$$Z_S \sqcup Z_T = Z_{S \cup T}$$
$$Z_S \sqcap Z_T = Z_{S \cap T}$$

$(M, \trianglelefteq)$ est alors un treillis, donc (M, Δ) est un groupement (de treillis); on l'appelle le <u>groupement logique de superposition complète de partitions</u>.

Des actions qui s'intériorisent en opérations élémentaires de Δ sont des discriminations d'un autre ensemble d'attributs et la décomposition correspondante des classes déjà construites.

Tout matériel "structuré" (blocs logiques, jeu de cartes (d'attributs), jeu de cartes d'ensembles, etc.) se prête à la formation de tels groupements. Du matériel qui est moins "idéalisé" (ensemble de quadrilatères, ensemble de blocs hexaèdres, solides géométriques, etc.) amène également à ce type de groupement. Cependant nous constatons au moins deux différences caractéristiques:

(i) la discrimination d'un ensemble d'attributs est moins évidente et

(ii) les classes d'une partition Z_S ne sont pas nécessairement toutes différentes des classes d'une partition Z_T si $S \neq T$.

Exemple:

Soit L l'ensemble des blocs logiques. Soient

E_1 = {rouge, bleu, jaune}

E_2 = {carré, rectangle, triangle, cercle}

E_3 = {épais, mince}

E_4 = {grand, petit}

Chacun de ces ensembles induit une partition de L. ("avoir la même couleur", ...). "Avoir la même couleur et la même forme" est encore une relation d'équivalence, qui induit encore une partition de L. Nous désignons par $Z_{\{1\}} = Z_1$ la partition de L qui est induite par la relation d'équivalence "avoir la même couleur" (E_1). Par $Z_{\{1, 2\}}$ nous désignons alors la partition de L induite par la relation d'équivalence "avoir la même couleur et la même forme". $Z_{\{1, 2\}}$ doit être considéré comme superposition des partitions Z_1 et Z_2.

M est alors l'ensemble de toutes les partitions de L que l'on peut obtenir en superposant des ensembles d'attributs décrits par E_1, E_2, E_3, E_4.

Un exemple d'un couple de la relation δ est alors

$$(Z_{\{1,\,3\}},\ Z_{\{1,\,2,\,3\}})$$

et un exemple d'un couple de la relation $\blacktriangleleft$ est alors

$$Z_{\{2\}} \blacktriangleleft Z_{\{1,\,2,\,3\}}$$

La figure 4 ci-après est le graphe du groupement logique de superposition complète de partitions dans l'ensemble L des blocs logiques pour lesquels les ensembles d'attributs sont: la forme, la couleur, l'épaisseur et la grandeur respectivement.

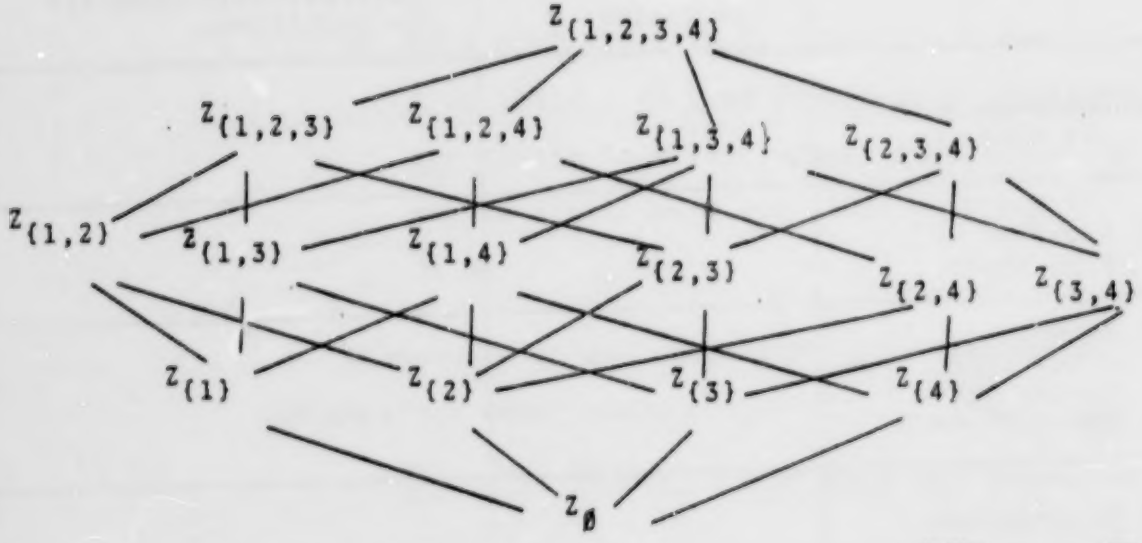


Figure 4

On y vérifie plus particulièrement les bornes supérieures et inférieures.

$$Z_S \sqcup Z_T = Z_{S \cup T}$$

$$Z_S \sqcap Z_T = Z_{S \cap T}$$

Suggestion de discussion:

Etant donné un ensemble H d'hexagones, élaborez les différences entre un groupement logique d'inclusion et un groupement logique de superposition complète de partitions que l'on peut former à partir de cet ensemble d'hexagones.

Démarche possible:

Groupement: $(M, M \times M, \Delta, \circ, \measuredangle)$ (WITTMANN)

(M, Δ) (STEINER)

	Inclusion	Superposition complète de partitions.
a) Ensemble M des états		
b) Exemple d'un état		
c) Exemple d'une opération élémentaire de Δ		
d) Description de Δ		
e) Peut-on tracer un graphe de (M, Δ) ou d'une partie de (M, Δ)?		

1.4 Groupements logiques de superposition partielle de partitions (Multiplication co-univoque de classes)[1].

La situation est semblable à celle de 1.3. Soit L un ensemble fini, non-vide, soient $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles d'attributs dont chacun induit une partition de L par rapport à la relation d'équivalence ρ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ (voir page 50.)

Nous définissons par induction un ensemble M* de partitions de L:

a) La partition triviale $Z_\emptyset$ appartient à M*.

b) Si $Z \in M^*$ alors toute partition T que l'on obtient de Z en décomposant exactement une classe de Z par rapport à un autre ensemble d'attributs est aussi un élément de M*.

L'ensemble Δ^* des opérations élémentaires se définit alors comme suit:

$\Delta^* \overset{\text{déf}}{=} \{(Z, T) / Z, T \in M^* \text{ et } T \text{ est obtenu de } Z \text{ selon b.}\}$

Les éléments de Δ^* sont appelés des discriminations locales et les éléments de Δ^{*-1} sont appelés des abstractions locales. La relation $\trianglelefteq^*$ qui est la fermeture réflexo-transitive de Δ^* est la relation $\trianglelefteq$ de

1. Beth et Piaget, Epistémologie Mathématique et Psychologique, Et. Ep. Génét., Vol XIV, Paris, 1961.

1.3 mais défini dans M*. $(M^*, \trianglelefteq^*)$ est encore un treillis, (M^*, Δ^*) est encore un groupement, le groupement logique de superposition partielle de partitions.

De tels groupements peuvent-ils être considérés comme étapes préléminaires la formation de groupements de superposition complète de partitions?

1.5 Groupements logiques des classes d'une partition.

Ce type de groupement n'a pas été formulé explicitement par PIAGET ni par WITTMANN. Nous le mentionnons ici parce que nous le rencontrons souvent lors de la structuration de situations d'apprentissage.

En analogie avec le symbolisme introduit en 1.3, nous considérons un ensemble L fini et non-vide. Soient alors $E_1,\ldots,E_n$ des ensembles d'attributs dont chacun induit une partition $Z_{(i)}$ de L (par rapport à la relation d'équivalence ρ_i).

Supposons alors que les classes de chaque $Z_{(i)}$ soient totalement ordonnées par une relation $\trianglelefteq_i$.

Choisissons ensuite une partition Z_S, $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$, comme ensemble d'états. Rappelons que Z_S est considérée comme superposition des partitions $Z_{(j)}$, $j \in S$.

Si la cardinalité de S est p alors toute classe de Z_S peut être symbolisée par un p-tuplet:

$1^{re}, 2^{e}, \ldots, p^{e}$ position $p \leq n$

$(a , b , \ldots, x)$

Dans une position donnée i nous trouverons les symboles pour les classes de $Z_{\{i\}}$ qui sont totalement ordonnées par $\trianglelefteq_i$.

Dans Z_S nous définissons une relation $\trianglelefteq$ comme suit:

$(a, b, \ldots, x) \trianglelefteq (a', b', \ldots, x') \longleftrightarrow a \trianglelefteq_1 a'$ et $b \trianglelefteq_2 b'$ et ... et $x \trianglelefteq_p x'$

La relation $\trianglelefteq$ ainsi définie dans Z_S est une relation d'ordre. Pour la relation Δ des opérations élémentaires nous pouvons choisir la relation de couverture dérivée de $\trianglelefteq$ (voir page 18).

Dans beaucoup de cas concrets, $(Z_S, \trianglelefteq)$ est un treillis; dans ces cas, (Z_S, Δ) est alors un groupement de treillis.

Exemples:

a) Soit L un ensemble fini d'hexagones. Soient

E_1 = {concave (0), convexe (1)}

E_2 = {0, 1, 2, 3, 6} axes de symétrie

E_3 = {1, 2, 3, 6} rotations différentes admises par la figure.

Considérons alors $Z_{\{1,2,3\}}$. Toute classe peut alors être symbolisée par un triplet (a,b,c) où a ε {0,1} , b ε {0,1,2,3,6} et c ε{1,2,3,6} . Si les propriétés E_1, E_2, E_3 étaient indépendantes et si l'ensemble L était suffisamment grand alors $Z_{\{1,2,3\}}$ comprendrait 2 x 5 x 4 classes. Mais lorsque E_1, E_2, E_3 sont interdépendantes ce nombre se réduit à 13. (La démonstration de cette affirmation est un joli exercice de la mathématique élémentaire). Nous donnons ci-après le graphe du treillis $(Z_{\{1,2,3\}}, \Delta)$ qui est un groupement des classes d'une partition d'un ensemble L d'hexagones:

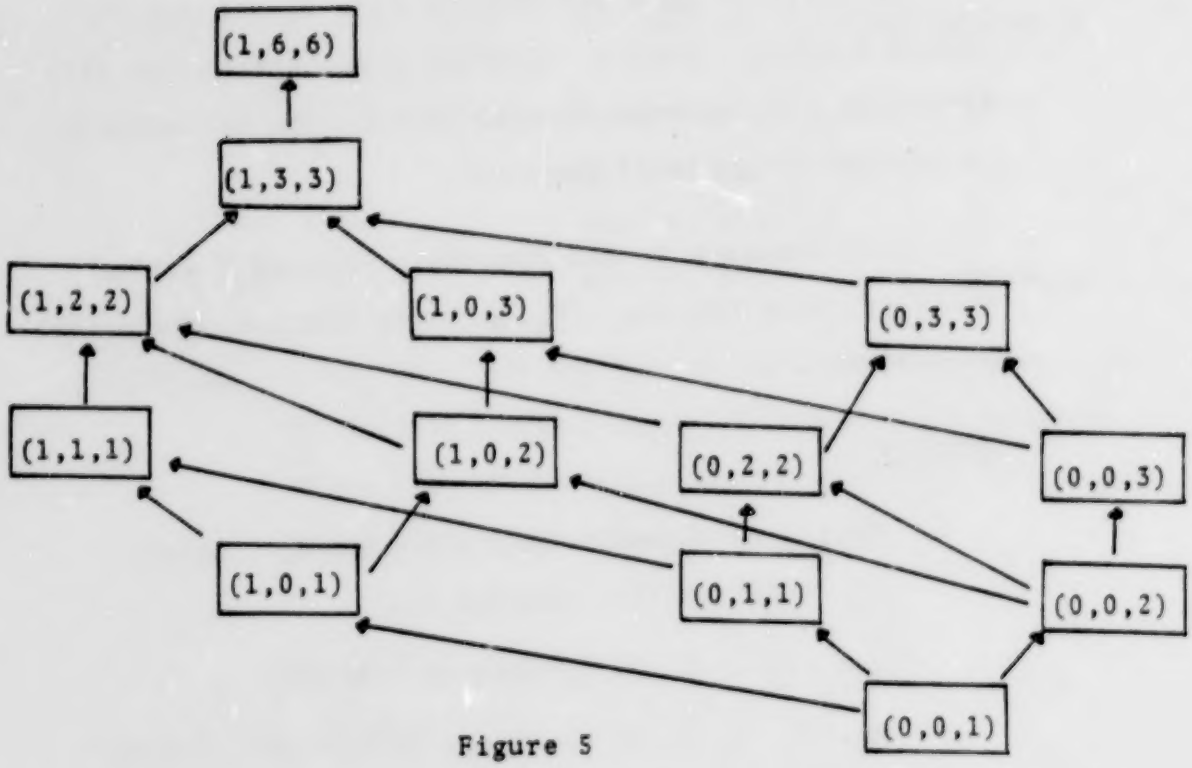


Figure 5

La relation $\trianglelefteq$ dans $Z_{\{1,2,3\}}$ se définit ici comme suit:

$$(a,b,c) \trianglelefteq (a',b',c') \longleftrightarrow a \leq a' \text{ et } b \leq b' \text{ et } c \leq c'$$

où $\leq$ est la relation "plus petit ou égal" dans un ensemble de nombres naturels. $\trianglelefteq$ peut être considérée comme un ordre de perfection dans $Z_{\{1,2,3\}}$ (et aussi dans L).

La relation Δ (symbolisée dans le graphe) est alors la relation de couverture dérivée de $\trianglelefteq$.

Dans $Z_{\{1,2,3\}}$ nous définissons sup et inf comme suit:

$(a,b,c) \sqcup (a',b',c') =$ (x,y,z) tel que

$x = \max(a, a')$

$y = \max(b, b')$

$z = \max(c, c')$ sont minimales

$(a,b,c) \sqcap (a',b',c') =$ (x,y,z) tel que

$\min(a, a') = x$

$\min(b, b') = y$

$\min(c, c') = z$ sont minimales

Exercice: Indiquons, sur des petits morceaux de papier, les 13 triplets symbolisant les éléments de ce groupement. Distribuons ces 13 morceaux dans un diagramme de VENN comme suit:

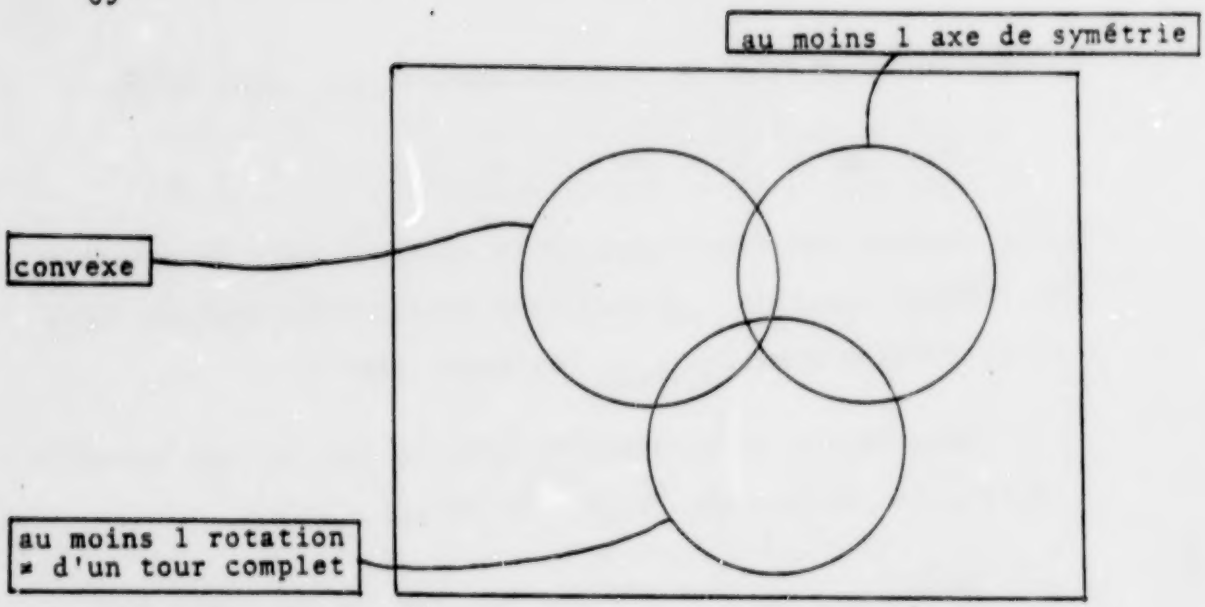


Figure 6

Pouvons-nous former, à partir de cet exercice, un groupement booléen dans l'ensemble L des hexagones? Faut-il changer la conception des triplets (a,b,c)? Si oui, comment?

b) Soit H un ensemble d'hexaèdres. Soient

E_1= {0,1,2,3} paires de faces parallèles

E_2= {0,1,2,3} quadruplets d'arêtes parallèles

E_3= {non-prisme (0), prisme (1)}

Considérons alors $Z_{\{1,2,3\}}$. Toute classe peut alors être symbolisée par un triplet (a,b,c) où a, b, $\in$ {0,1,2,3} et c $\in$ {0,1} . Si les propriétés E_1, E_2, E_3 étaient indépendantes et si H était suffisamment grand

alors $Z_{\{1,2,3\}}$ comprendrait 4 x 4 x 2 classes. Mais lorsque E_1, E_2, E_3 sont interdépendantes ce nombre se réduit à 9. (La démonstration de cette affirmation n'est pas triviale). Voici le graphe du groupement des classes de la partition $Z_{\{1,2,3\}}$

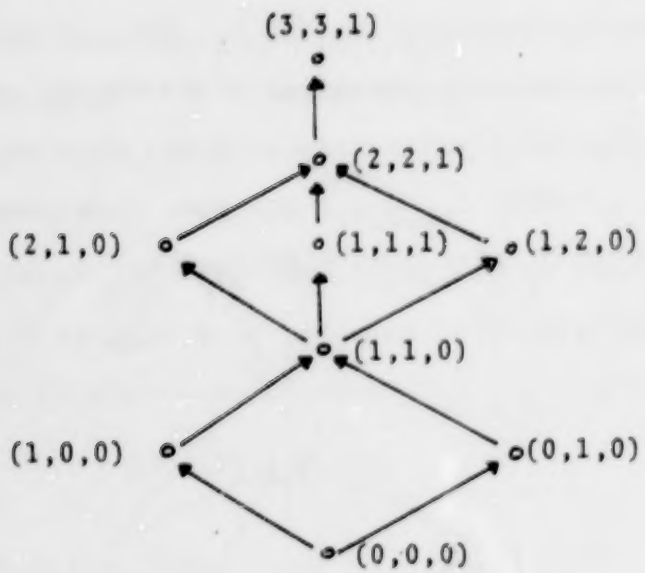


Figure 7

La relation $\trianglelefteq$ dans $Z_{\{1,2,3\}}$ se définit également comme suit:

$(a,b,c) \trianglelefteq (a',b',c') \Longleftrightarrow a \leq a'$ et $b \leq b'$ et $c \leq c'$

où $\leq$ est la relation "plus petit ou égal" dans un ensemble de nombres naturels. Nous pouvons considérer $\leq$

en tant qu'ordre de perfection dans $Z_{\{1,2,3\}}$ (et dans H). La relation Δ (symbolisée dans le graphe, figure 7) est alors la relation de couverture de $\trianglelefteq$.

Variante: Une variante du groupement précédent se développe à partir du désir de rendre manipulables certaines de ces opérations en composant ou en décomposant des hexaèdres. Ci-après, nous présentons le graphe d'une structure relationnelle dans $Z_{\{1,2,3\}}$ où les flèches indiquent que la composition de 2 hexaèdres d'une classe résulte dans un hexaèdre de l'autre classe; ainsi nous recevons une relation Δ^* dans $Z_{\{1,2,3\}}$, qui peut être considérée comme ensemble d'opérations élémentaires:

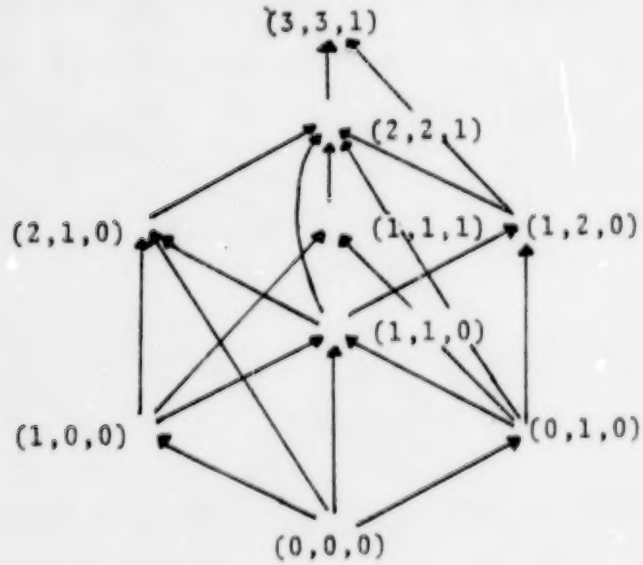


Figure 8

Δ^{*-1} est alors l'ensemble des opérations qui indiquent la décomposition d'un hexaèdre d'une classe en deux

hexaèdres de l'autre classe.

La relation $\triangleleft^*$ engendrée par Δ^* en tant que fermeture réflexo-transitive est une sous-relation de $\triangleleft$: $\triangleleft^* \subseteq \triangleleft$ mais $((1,1,0),(1,1,1)) \in \triangleleft$ et $((1,1,0),(1,1,1)) \notin \triangleleft^*$

$(Z_{\{1,2,3\}}, \triangleleft^*)$ n'est plus un treillis. $(Z_{\{1,2,3\}}, \Delta^*)$ n'est alors plus un groupement de treillis des classes de la partition $Z_{\{1,2,3\}}$.[1] La relation $\triangleleft^*$ peut quand même être considérée comme un ordre de perfection dans $Z_{\{1,2,3\}}$ avec l'exception que (1,1,0) et (1,1,1) ne sont plus comparables.

En considérant la relation $\bar{\Delta}^*$ qui est la relation de couverture de $\triangleleft^*$ nous recevons un graphe simplifié décrivant la structure d'ordre $(Z_{\{1,2,3\}}, \triangleleft^*)$:

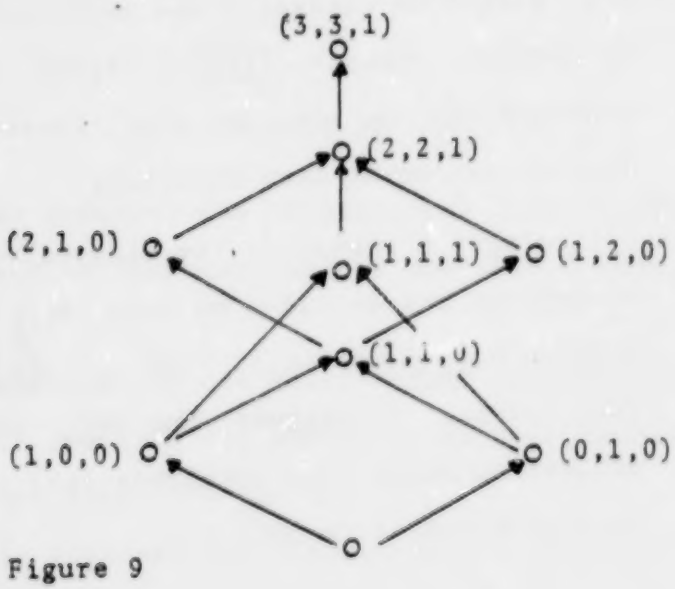


Figure 9

1. Ce sont, entre autres, des exemples comme celui-ci qui ont motivé la généralisation du concept en termes de catégories (voir notes du cours Mat 4883).

La considération d'une relation minimale comme l'est $\bar{A}^*$ est particulièrement pertinente si l'on tente de réduire au minimum le matériel de manupulation, tout en conservant la même relation d'ordre partiel engendré en tant que fermeture réflexo-transitive.

Suite de l'exercice de la page 68 .

Dans les pages qui suivent, nous tenterons d'élaborer les liens qui existent entre un groupement des classes d'une partition et un groupement booléen correspondant. Pour faire ceci, nous nous servirons de l'exemple de l'exercice de la page 68, qui est facile à généraliser. Quant au symbolisme que nous utiliserons, nous faisons remarquer que:

- s'il s'agit de classes d'une partition nous encadrons le symbole, exemple: $\boxed{102}$, classe des hexagones convexes, qui ne sont pas symétriques et qui admettent deux et seulement deux rotations;
- s'il s'agit d'ensembles (de classes ou d'objets) nous ne mettons pas de cadre ou nous inscrivons le symbole dans un cercle; exemple: 102 ou $\textcircled{102}$, ensemble (des classes) d'hexagones qui sont convexes et qui admettent au moins deux rotations (peu importe s'ils sont symétriques ou non).

Voici les états du groupement de la figure 5 distribués dans un diagramme de VENN:

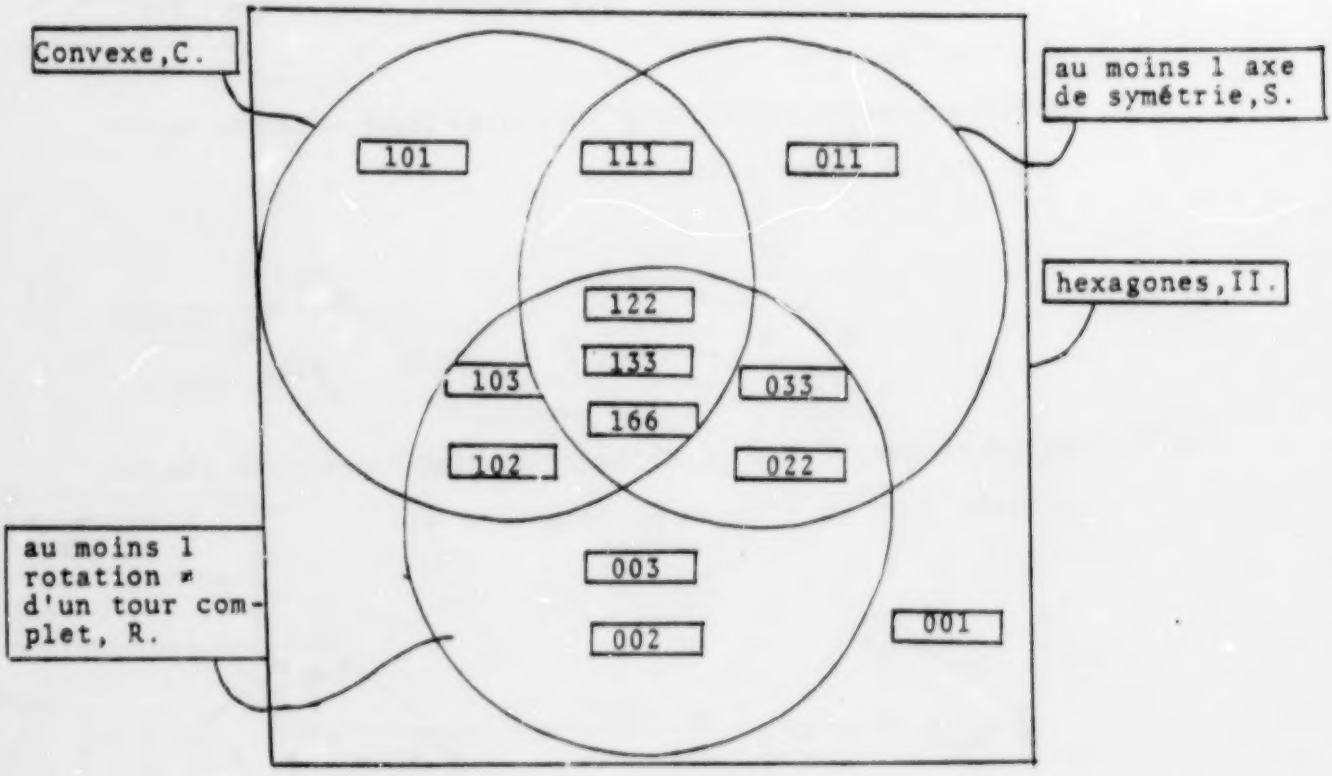
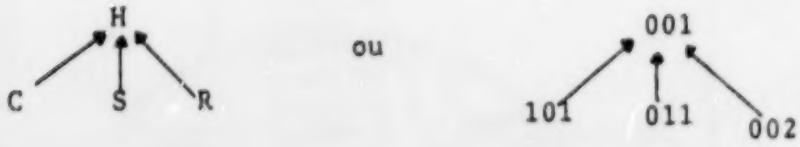


Figure 10

- Tous les éléments des classes dans C sont convexes (et admettent un tour complet); l'ensemble C peut être symbolisé par 101.
- Tous les éléments des classes dans S possèdent au moins 1 axe de symétrie (et admettent un tour complet); S peut être symbolisé par 011.
- Tous les éléments des classes dans R admettent au moins 2 rotations différentes; R peut être symbolisé par 002.

- Tous les éléments des classes dans l'ensemble 11 des hexagones admettent un tour complet; H peut être symbolisé par 001.
- Concernant la relation d'inclusion nous obtenons alors un graphe comme suit:



En continuant cette démarche nous complèterons le graphe suivant d'un groupement booléen dans H:

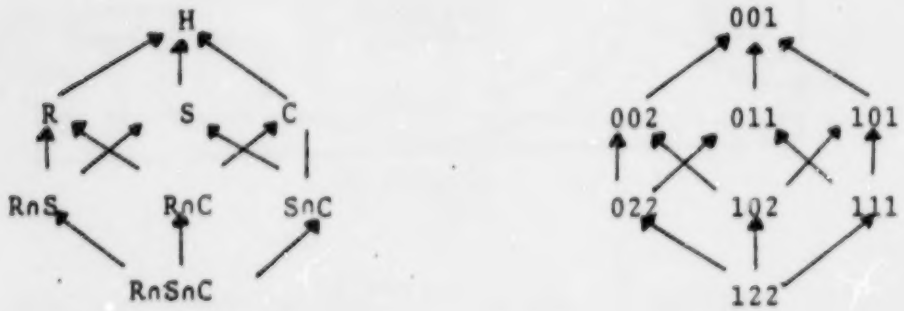


Figure 11

Ce groupement booléen correspond au diagramme de VENN de la figure 10. Cependant, il ne correspond pas au groupement des classes de la partition $Z_{\{1,2,3\}}$ (page 67, figure 5) qui est plus fin; mais en le raffinant nous y arrivons:

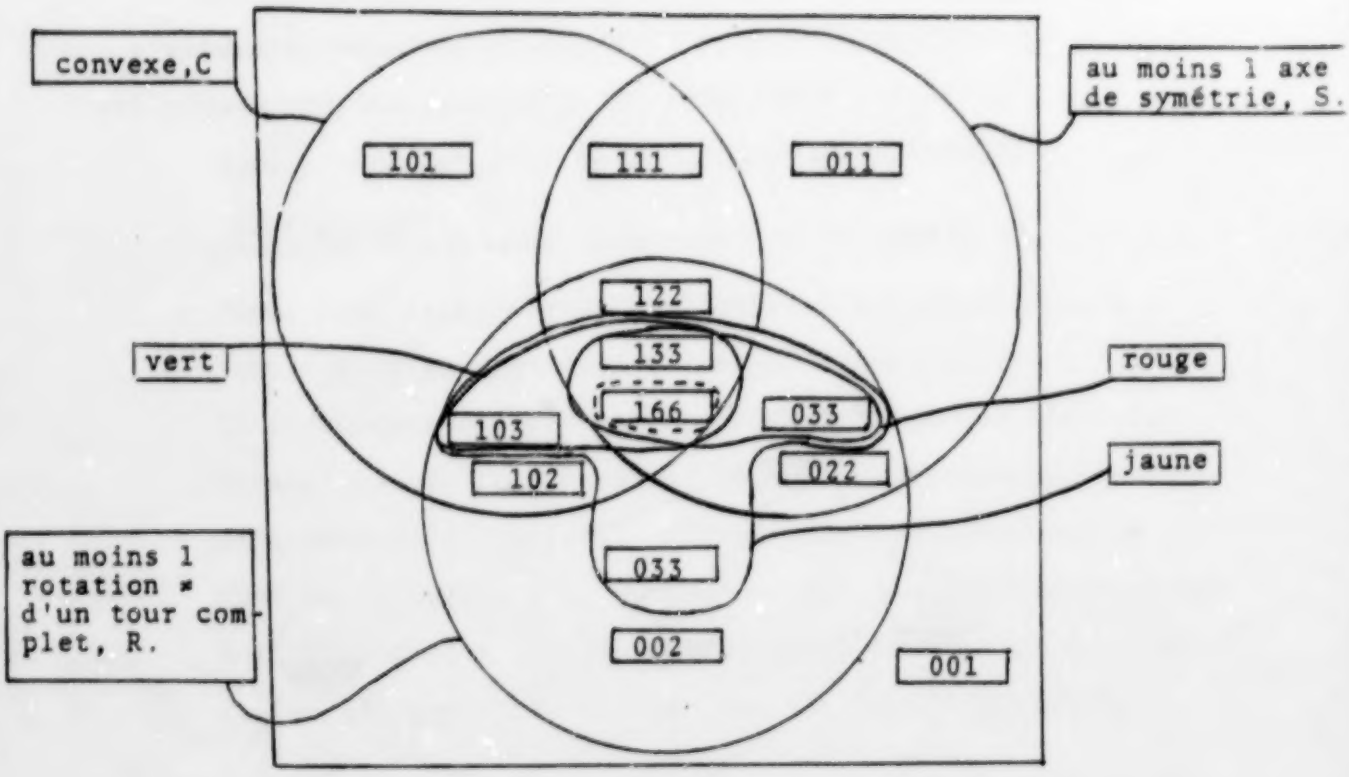


Figure 12

- Tous les éléments des classes dans l'ensemble "jaune" admettent au moins 3 rotations; on peut le symboliser par 003.
- Tous les éléments des classes dans l'ensemble "vert" admettent au moins 3 rotations et ils sont convexes; on peut le symboliser par 103.
- Tous les éléments des classes dans l'ensemble "rouge" admettent (au moins) 3 rotations et 3 symétries; on

peut le symboliser par 033.

- L'intersection de l'ensemble "rouge" avec l'ensemble "vert" est symbolisée par 133. 166 est l'ensemble des hexagones réguliers.

Le graphe de ce groupement booléen est le suivant:

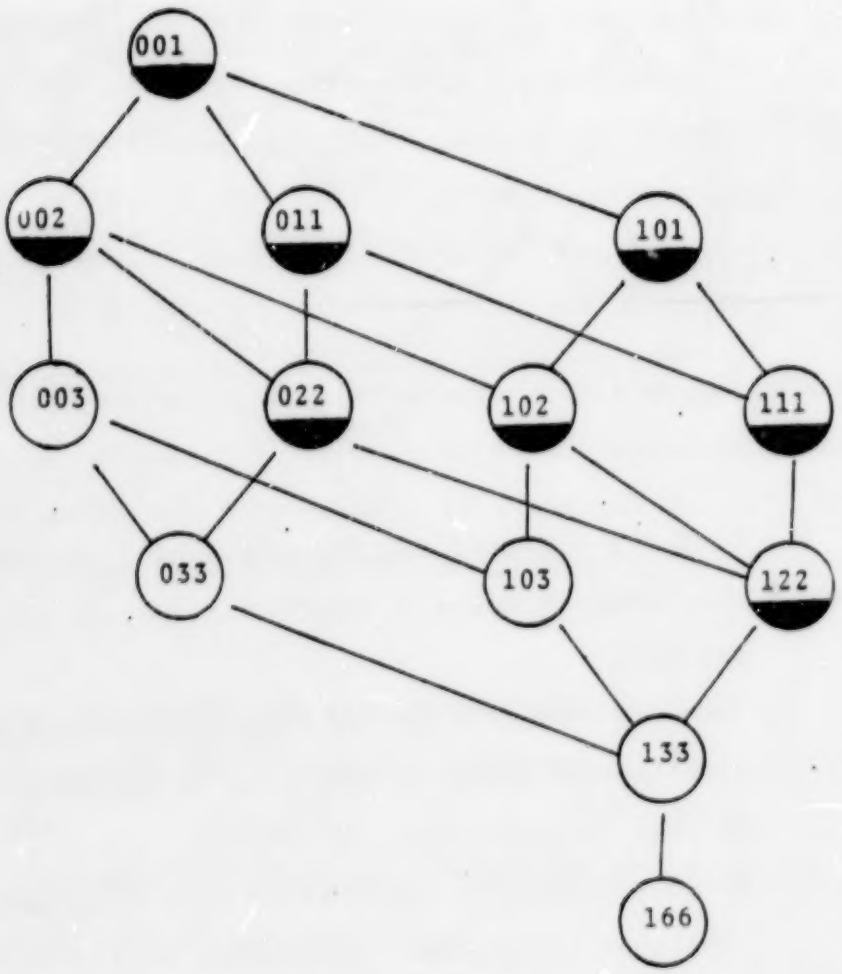


Figure 13

Ce groupement booléen correspond alors au diagramme ensembliste de la figure 12. Il est "isomorphe" au groupement des classes de la partition $Z_{\{1,2,3\}}$(figure 5). Nous y reconnaissons le groupement de la figure 11 comme "sous-groupement".

Ainsi nous avons décrit un processus qui développe, à partir d'un groupement des classes d'une partition $Z_{\{1,2,3\}}$, le groupement booléen correspondant. Dans une étape intermédiaire de ce processus, nous avons élaboré un groupement booléen (figure 11) correspondant au diagramme de VENN de la figure 10. Nous décrivons ci-après un processus qui développe, à partir du groupement booléen de la figure 11, un groupement de classes qui lui est "isomorphe":

La formation de sous-ensembles dans l'ensemble H des hexagones partage cet ensemble en deux classes disjointes: l'ensemble et son complément. Le diagramme de la figure 10 montre que nous faisons un tel partage de 3 différentes façons:

i) l'ensemble des convexes et son complément,

ii) l'ensemble des hexagones symétriques et son complément,

iii) l'ensemble des hexagones admettant au moins deux rotations et son complément.

En terme de groupement de classes ceci nous fournit 3 en-

sembles d'attributs dont chacun contient 2 éléments:[1]

E^*_1= {concave (0), convexe (1)}

E^*_2= {pas d'axe de symétrie (0), au moins 1 axe de symétrie (1)}

E^*_3= {n'admet qu'un tour complet (1), admet au moins 2 rotations différentes (2)}

La superposition complète des partitions Z^*_1, Z^*_2 et Z^*_3 nous fournit la partition $Z^*_{\{1,2,3\}}$ qui comprend les classes suivantes:

{001, 002, 011, 012, 101, 102, 111, 112}

Une relation d'ordre définie comme à la page 68, nous permet de tracer le graphe suivant de ce groupement de classes:

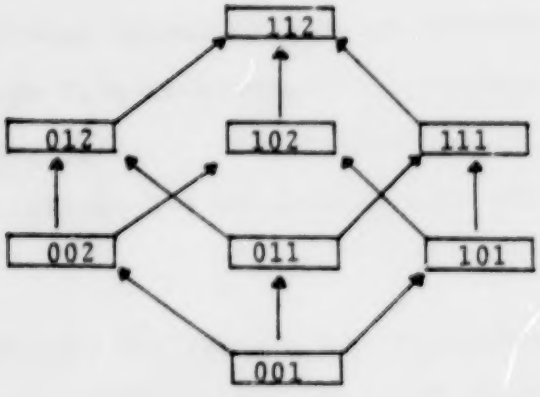


Figure 14

Ce graphe décrit le groupement des classes de $Z^*_{\{1,2,3\}}$ qui est "isomorphe" au groupement booléen de la figure 11.

---

1. Nous mettons un astérisque ici pour ne pas confondre ces ensembles d'attributs avec ceux de la page 66.

Il est encore un "sous-groupement" du groupement des classes de $Z_{\{1,2,3\}}$ de la figure 5.

Cet exercice avait pour but d'étudier les ressemblances et les différences entre groupements booléens et groupements de classes. Du point de vue structural, il ne semble y avoir aucune différence entre groupements correspondants des deux types, ce qui nous amène souvent à les confondre. Au niveau des actions et des opérations élémentaires, cependant, il me semble qu'il y ait une différence importante:

Les actions dans un groupement booléen étant les séparations d'un ensemble donné en sous-ensembles s'intériorisent en tant qu'opérations d'inclusion. Si l'on essayait de représenter graphiquement de telles actions alors on dessinerait comme suit:

Les actions d'un groupement de classes étant des activités qui consistent à partager un ensemble en deux parties disjointes s'intériorisent éventuellement en tant qu'opérations de perfectionnement. Si l'on tentait de représenter graphiquement de telles actions alors on dessinerait comme suit:

Cette différence des deux types de groupement permettra peut-être d'expliquer des ambiguités de formation de concept comme

carré en tant que rectangle particulier	ou	carré en tant que forme distincte du rectangle, mais qui s'avérera plus parfait que le rectangle.

Des expériences ayant pour but de clarifier cette distinction me semblent être particulièrement prometteuse.

La liste des groupements logiques donnée par PIAGET est plus longue que celle présentée ici. Elle comprend encore[1] :

---

1. c.f. [22] pages 135 à 138.

-les groupements impliquant des relations anti-symétriques.

-les groupements impliquant des relations symétriques.

-les groupements logiques et l'inference concrète.

Nous les omettons ici en raison d'un manque de temps et parce que la conception et la formalisation de ces types de groupements sont encore très ambigües. Nous concentrerons nos efforts plutôt sur les groupements infra-logiques.

2. Groupements infra-logiques[2].

Les opérations logiques (du paragraphe 1 de ce chapitre) sont caractérisées par les propriétés suivantes:

a) Des opérations logiques sont des relations entre les éléments d'un ensemble.

b) Des opérations logiques, par principe, sont indépendantes de la contiguité spatio-temporelle des éléments.

c) Des opérations logiques peuvent être effectuées mentalement sans changer la position spatio-temporelle des éléments.

Par contre, les opérations infra-logiques, qui sont également engendrées par des actions, comprennent un aspect spatio-temporel:

---

2. Parfois ils sont aussi appelés des groupements spatio-temporels.

a) Des opérations infra-logiques sont des relations entre des parties et un tout.

b) La constitution du tout dépend essentiellement de la contiguité spatio-temporelle des parties.

c) Les opérations infra-logiques peuvent être effectuées mentalement seulement si la position spatio-temporelle des éléments est changée aussi.

Les opérations infra-logiques sont également organisées dans des groupements. PIAGET a montré[1] que chaque type de groupements logiques est associé à un type de groupements infra-logiques. "Il est d'un importance fondamentale pour la psycho-genèse qu'à partir de patrons (patterns) sensori-moteurs le domaine infra-logique est constitué en premier lieu. Les opérations et les relations logiques restent subordonnées longtemps à leurs

---

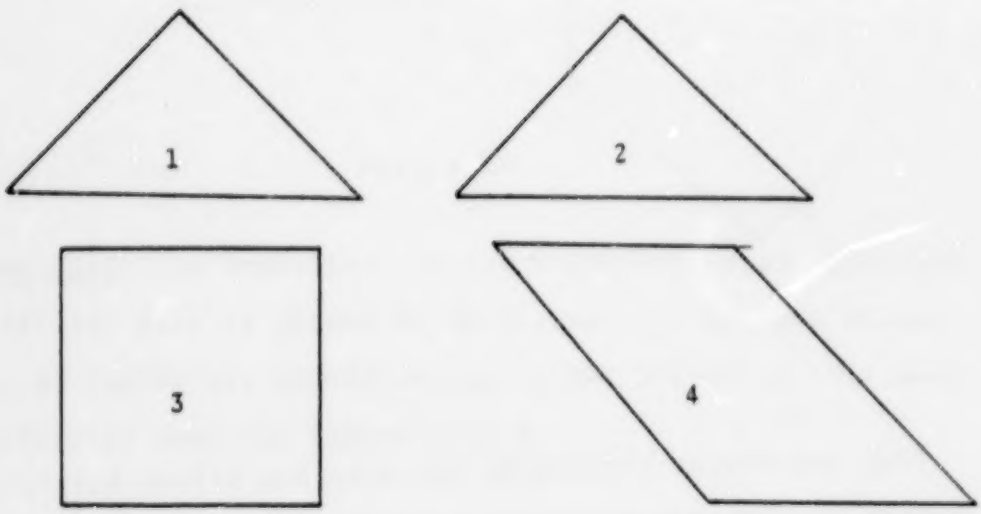
1. c.f. [16] page 50.

homologues infra-logiques. Il leur faut un long processus de développement pour se libérer de cette domination.[2]

2.1 Groupements infra-logiques d'extension et de réduction.

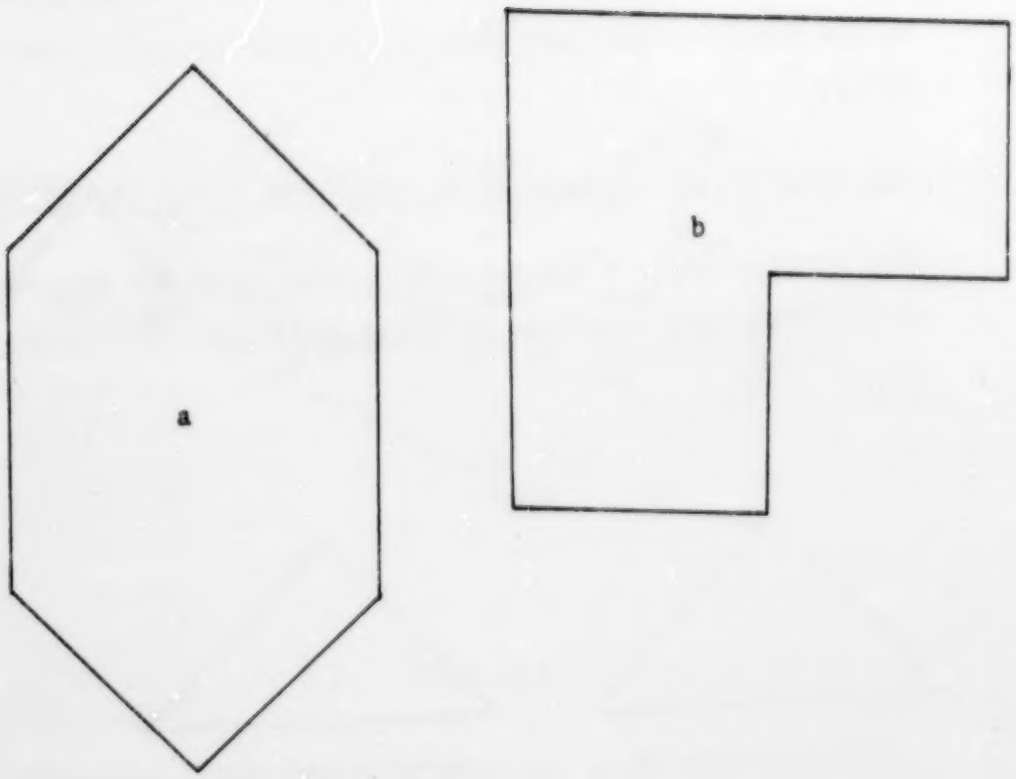
Considérons d'abord un exemple: Dans le cadre du jeu de TANGRAM nous trouvons la fiche suivante: [3]

AVEC



2. c.f. [24] page 59.
3. ESS, Tangram Cards, Debster Division - Mc Graw-Hill Book Company, Toronto, 1968.

CONSTRUIS



Pour construire l'hexagone (a) avec les pièces 1,2,3,4 nous pouvons commencer par n'importe quelle pièce. Ensuite nous y ajoutons, à volonté, une pièce après l'autre. Ainsi nous créons des états intermédiaires. Chacun de ces états est une partie (incomplète) de la construction finale (qui est l'hexagone). Le graphe suivant montre les possibilites diverses de constituer l'hexagone avec les pièces données. Nous y avons inclus la partie vide comme état intermédiaire de la construction finale.

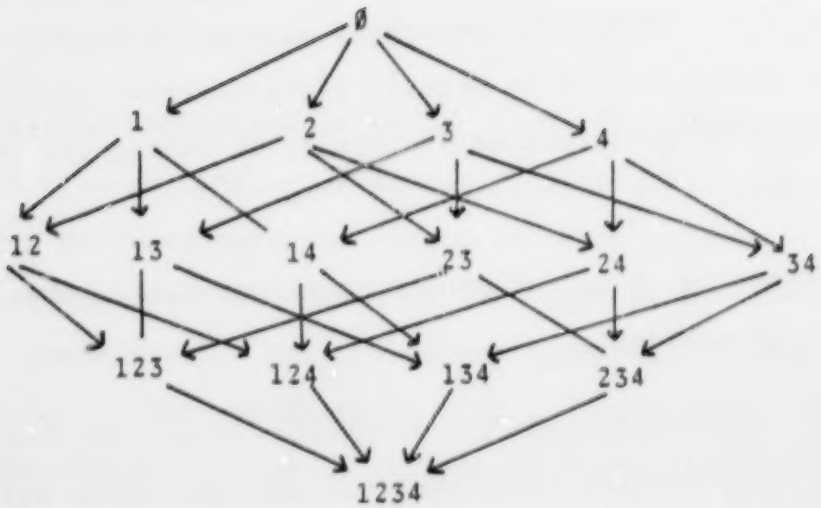


Figure 15

Remarques: La symbolisation des différents états (par des chiffres) dans le graphe de la figure 15 n'est pas unique. (n, m) représente plutôt la classe des états que l'on peut construire avec les pièces n et m.

Par 12, par exemple, nous ne comprenons pas n'importe quelle combinaison de 1 et 2 mais plutôt celles qui conduiront, après d'autres adjonctions, à l'hexagone.

Une flèche du diagramme signifie l'adjonction d'une pièce élémentaire à la partie (incomplète) donnée. Les opérations considérées dans ce casse-tête sont des relations entre un tout (hexagone) et ses parties. La constitution du tout dépend essentiellement de la position relative des par-

ties. Même si nous effectuons mentalement les opérations, la position spatio-temporelle des parties intervient. -Comment décrire de manière satisfaisante cette dépendance entre la construction du tout et la contiguité relative des pièces?

Néanmoins, voici un premier essai de description de ce type de groupement:

Soit M l'ensemble des parties d'un tout (construction). Ce tout pouvant être constitué par des pièces élémentaires données. Dans M nous définissons l'ensemble Δ des opérations élémentaires comme suit:

$\Delta = \{(A, B) / A, B \in M$ et B est dérivé de A en y ajoutant une pièce élémentaire$\}$

WITTMANN appelle les éléments de Δ des <u>extensions élémentaires</u> et celles de Δ^{-1} des réductions(prélèvements) élémentaires. La fermeture réflexo-transitive de Δ est une relation d'ordre $\trianglelefteq$ telle que $(M, \trianglelefteq)$ est un treillis. (M, Δ) est alors un groupement (de treillis). -Ce type de groupement correspond au groupement booléen dans la liste des groupements logiques.

<u>Autres exemples</u>:

a) Tous les casse-tête.

b) "Model kits" (construction d'un modèle d'avion).

c) Les états constitués de provinces (etc).

d) Diagrammes de VENN.

Suggestion d'exercice: Dessine les différents états possibles du graphe de la figure 15.

Ci après nous esquissons le graphe d'un autre exemple de groupement de ce type. Les pièces élémentaires y sont des triangles équilatéraux. La figure verte constituée de 6 triangles équilatéraux forme le tout dont on considère les parties comme états. Les opérations élémentaires sont les adjonctions ou les prélèvements d'un triangle équilatéral selon des règles précises. Essayez de formaliser cet exemple de groupement infra-logique de réduction.

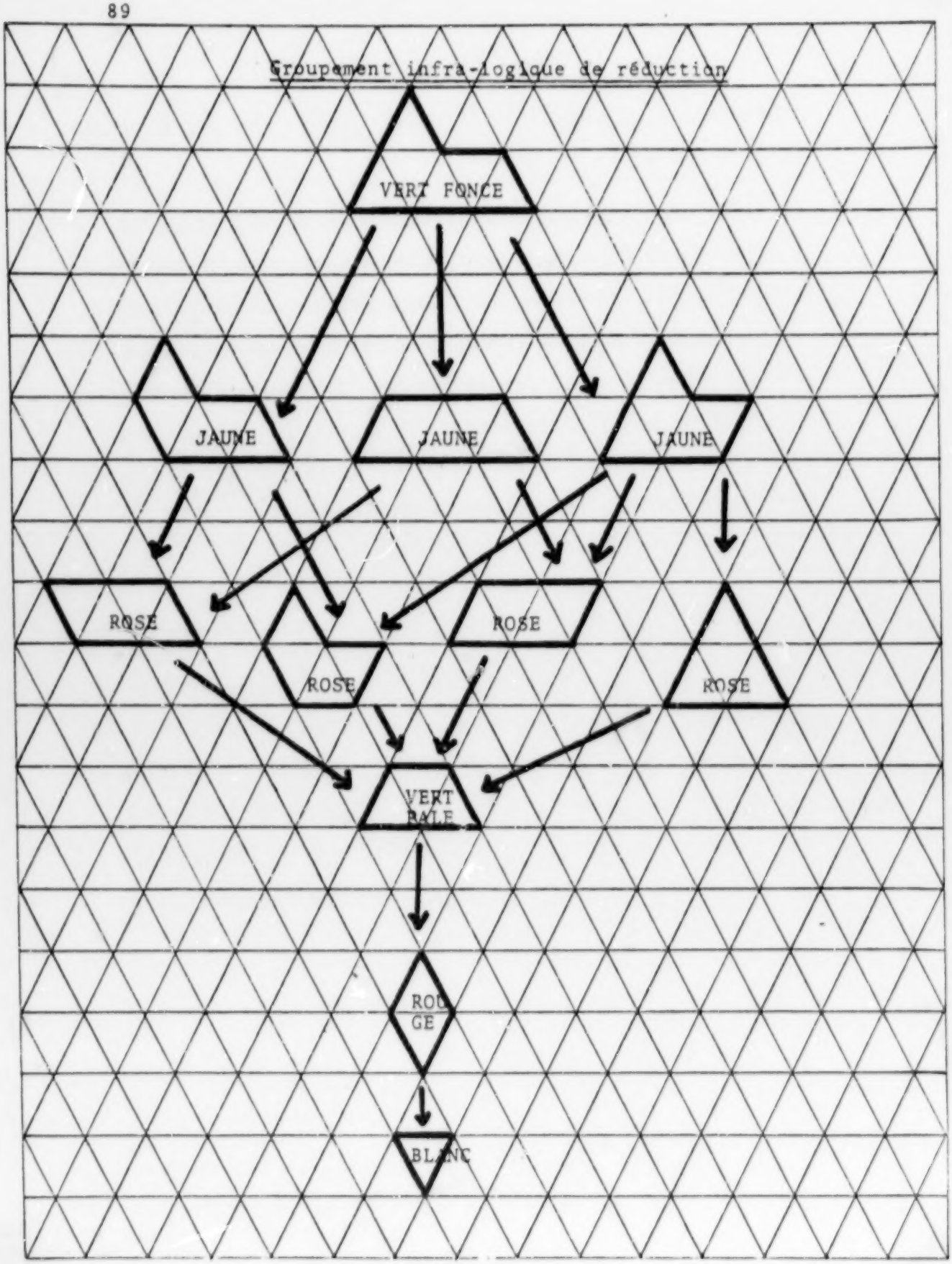

Groupement infra-logique de réduction
VERT FONCE
JAUNE
JAUNE
JAUNE
ROSE
ROSE
ROSE
ROSE
VERT PALE
ROUGE
BLANC

Figure 16

Description du groupement de la figure 16:

Soit F une figure donnée composable[1] de triangles équilatéraux isométriques. Soit $\bar{F}$ l'ensemble de toutes les figures composables des mêmes triangles équilatéraux qui couvrent F partiellement ou complètement; dans $\bar{F}$ nous identifions les figures qui sont l'image l'une de l'autre par une isométrie positive.

Dans $\bar{F}$ = {A, B,... } nous définissons un ensemble d'opérations élémentaires:

Δ = {(X, Y) / X, Y $\in \bar{F}$ et Y est obtenu par X en prélevant 1 triangle}.

La relation $\trianglelefteq$ engendrée par Δ comme fermeture réflexo-transitive se dit "... comprend ...". ($\bar{F}$, $\trianglelefteq$) est une structure d'ordre; ($\bar{F}$, $\trianglelefteq$) est un treillis (pour l'exemple donné); X $\sqcup$ Y = Z tel que Z soit compris dans X et Y, X $\sqcap$ Y = Z tel que Z comprenne X et Y. ($\bar{F}$, Δ) de notre exemple est alors un groupement (de treillis). Nous l'appellerons un groupement infra-logique de réduction (ou de prélèvement).

1. "Composable de triangles équilatéraux" veut dire que l'on met les triangles côté à côté. Il n'y aura jamais de triangles qui ne se touchent que par un point.

2.2 Groupement infra-logique de substitution.

Soit M l'ensemble des manières (essentiellement différentes) de construire un tout donné avec des blocs de construction. Supposons que le tout peut être construit avec les blocs donnés d'au moins une manière. On définit Δ dans M comme suit:

Δ = {(S, T) / S, T $\in$ M et T est obtenu par S en substituant un bloc par des blocs plus petits}

WITTMANN appelle les éléments de Δ les raffinements élémentaires de la construction. La fermeture réflexo-transitive de Δ est la relation $\trianglelefteq$ qui s'énonce "...est construit plus grossièrement que...". (M, $\trianglelefteq$) est une structure d'ordre. Il dépend essentiellement de la présence de blocs de construction appropriés si (M, $\trianglelefteq$) forme un treillis ou non[1].

Ci-après nous donnons un exemple d'un groupement infra-logique de substitution qui est un treillis:

Soit F une figure composable de triangles équilatéraux isométriques[2]. Soit $\bar{F}$ l'ensemble de toutes les manières possibles de composer F par des triangles équilatéraux et leurs composés. Dans F nous définissons des opérations élémentaires comme suit:

Δ = {(X, Y) /X, Y $\in$ $\bar{F}$ et Y est obtenu par X en décomposant une partie de X en deux}.

---

1. WITTMANN prétend que (M, $\trianglelefteq$) est au moins un demi-treillis. c.f. [22] page 140.
2. Voir la remarque 1 de la page précédente.

La fermeture réflexo-transitive de Δ est la relation qui se dit: "... est construit plus grossièrement que ...".
$(\bar{F}, \preceq)$ est une structure d'ordre.
Le graphe qui suit (figure 17) décrit un tel groupement qui est un treillis: F est l'ensemble de figures du diagramme. Δ est donnée par l'ensemble des flèches. $(\bar{F}, \Delta)$ est un groupement infra-logique de substitution.

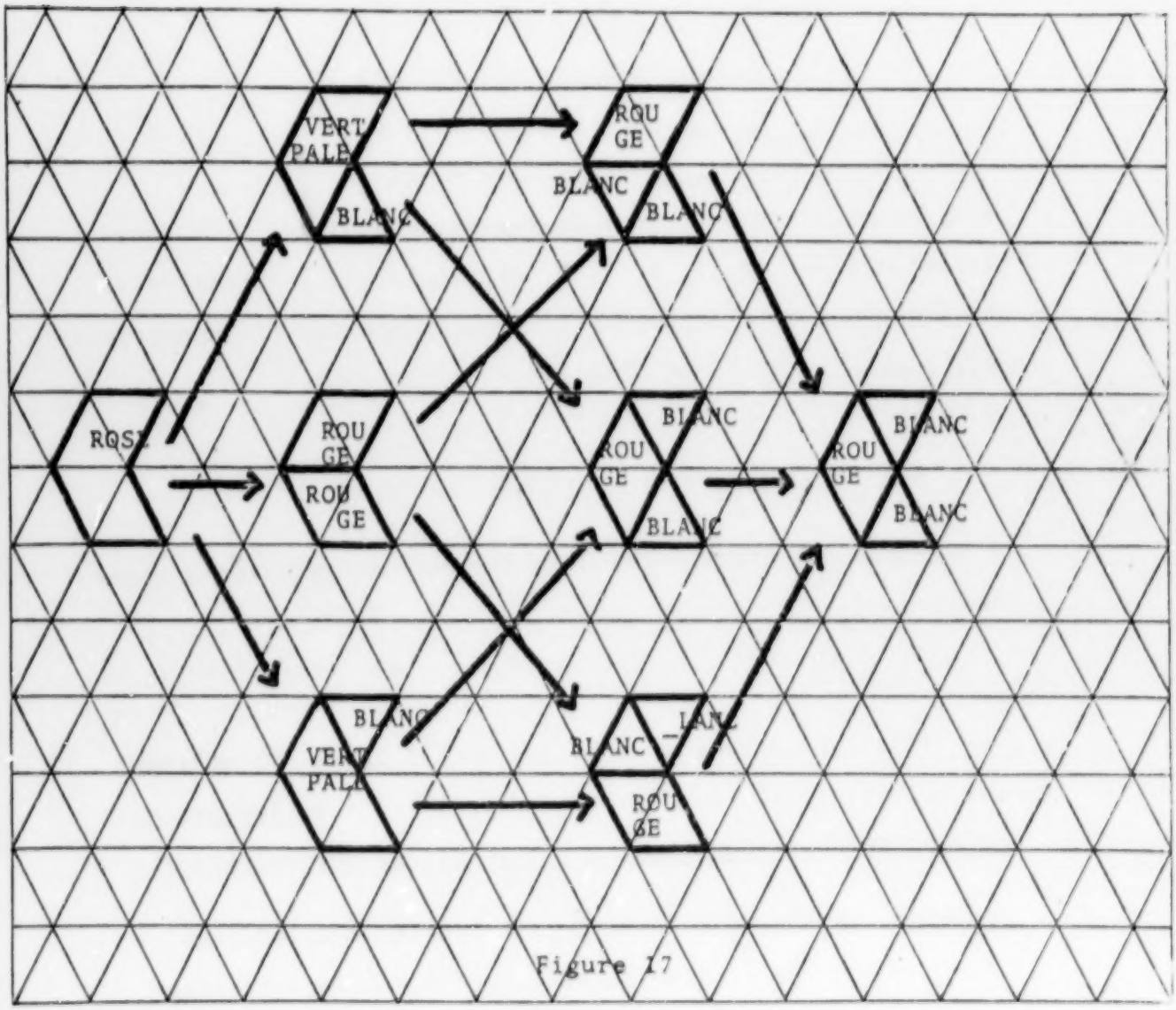


Figure 17

Les décompositions d'un carré pour en construire un TANGRAM peuvent également être considérées comme groupement infra-logique de substitution.

2.3 Groupement infra-logique de superposition complète de décompositions (partitions).

Soit donné un tout composé d'un nombre fini de pièces élémentaires. Soient alors

$$Z_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_r\}$$

$$Z_2 = \{B_1, B_2, \ldots, B_s\}$$

$$Z_n = \{X_1, X_2, \ldots, X_t\}$$

des décompositions du tout en parties disjointes. Un sous-ensemble S de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ induit alors la décomposition appropriée à l'application simultanée des décompositions Z_i, $i \in S$.

Soit alors

$$M = \{Z_S \;/\; S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

l'ensemble des états. Sur M on définit une relation Δ comme suit:

$$\Delta = \{(Z_S, Z_T) \;/\; S \subseteq T \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, \text{ card } (T \setminus S) = 1\}$$

Des réflexions analogues à celles de 1.3 (page 59) montrent que (M, Δ) est un groupement (de treillis) - un groupement infra-logique de superposition complète de décompositions.

Exemple: (a) Un tout composé de triangles équilatéraux[1] ou un tout dessiné sur un grillage triangulaire suggère des décompositions selon 3

1. Voir remarque de la page 90 .

différentes directions (principales. On les appellera Z_1, Z_2 et Z_3. La superposition de ces décompositions conduit à des treillis, dont on trouve un exemple ci-après. Etudiez cet exemple et élaborez ensuite un autre exemple en manipulant le matériel approprié et en dessinant son graphe sur un grillage triangulaire.

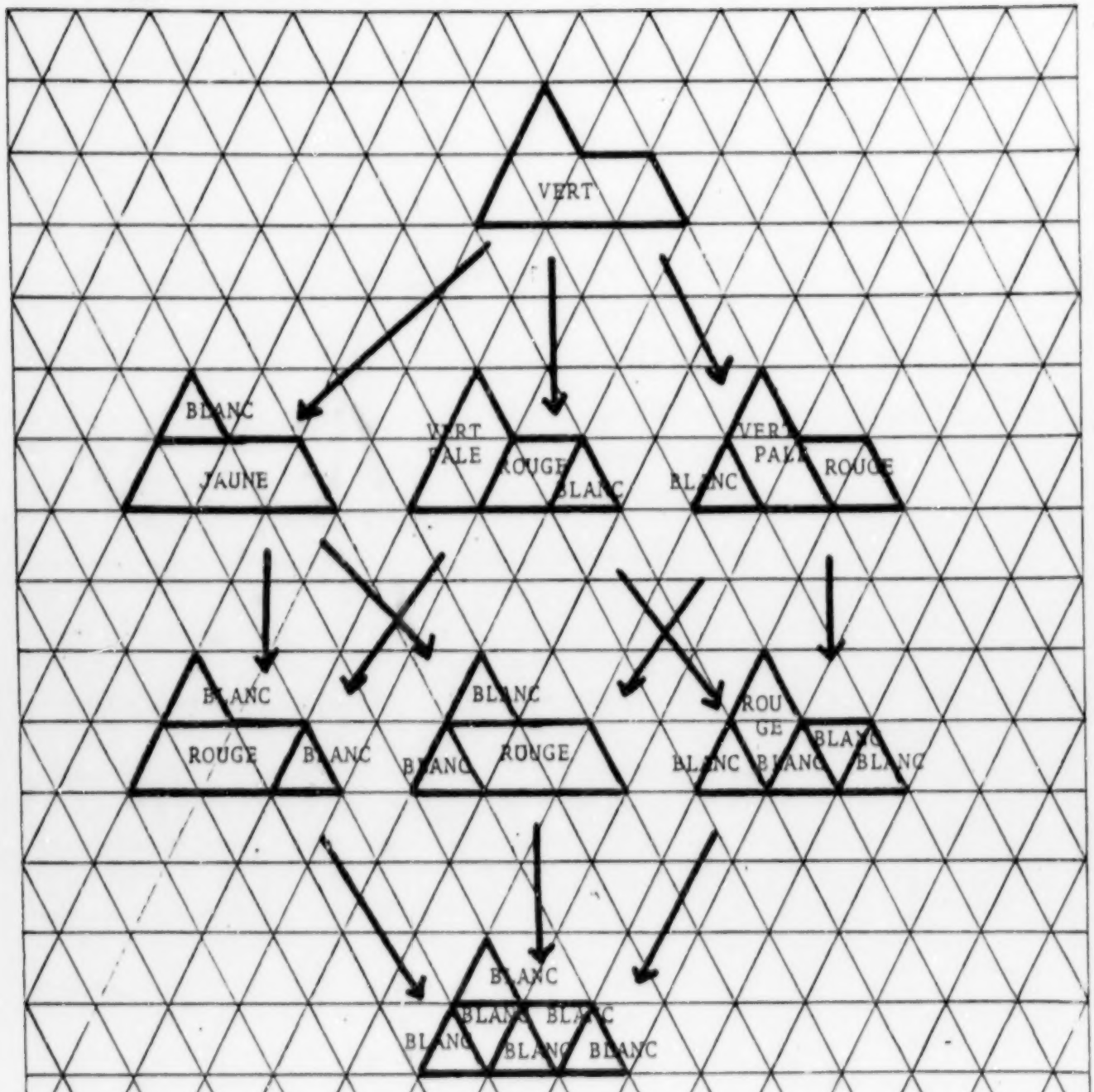
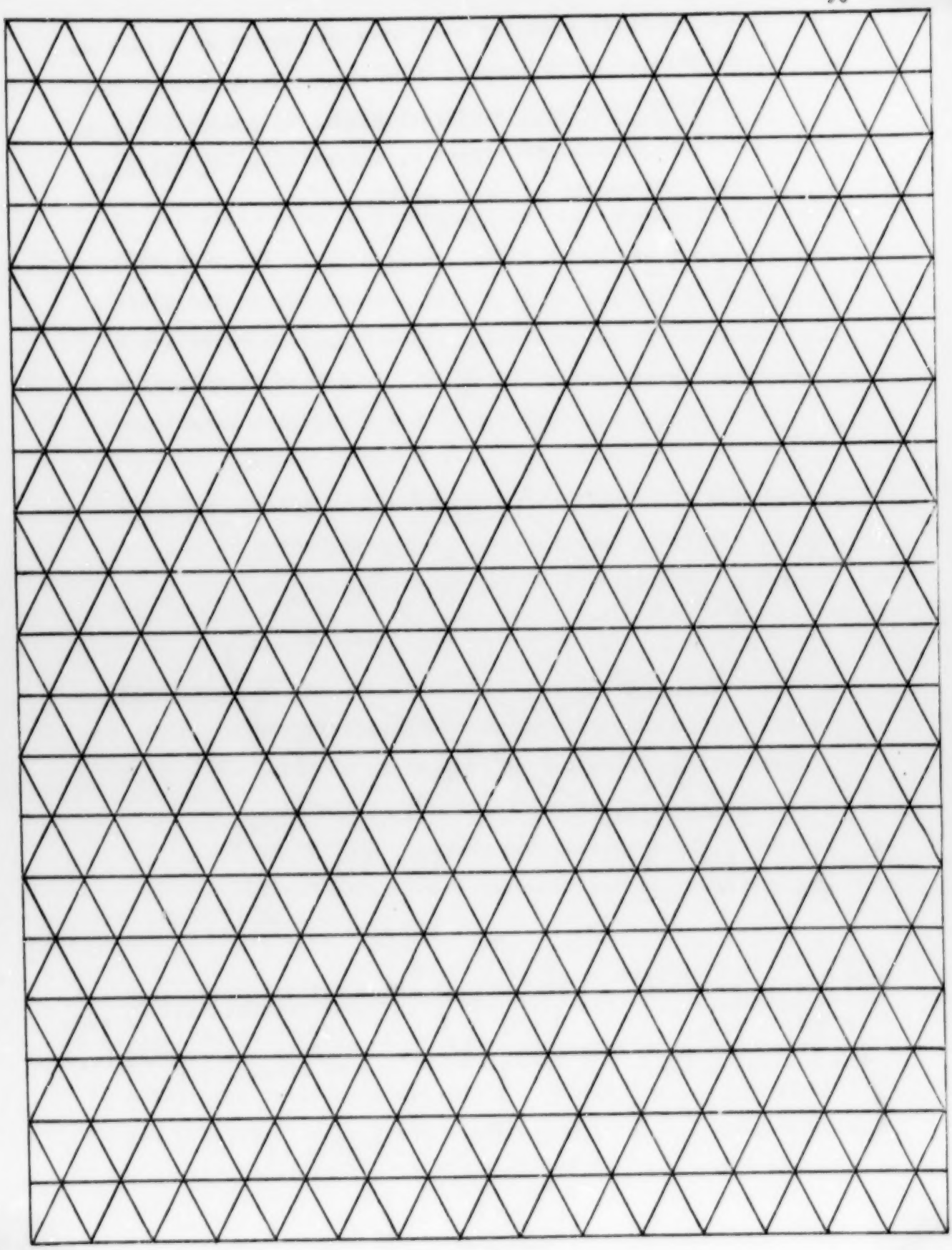
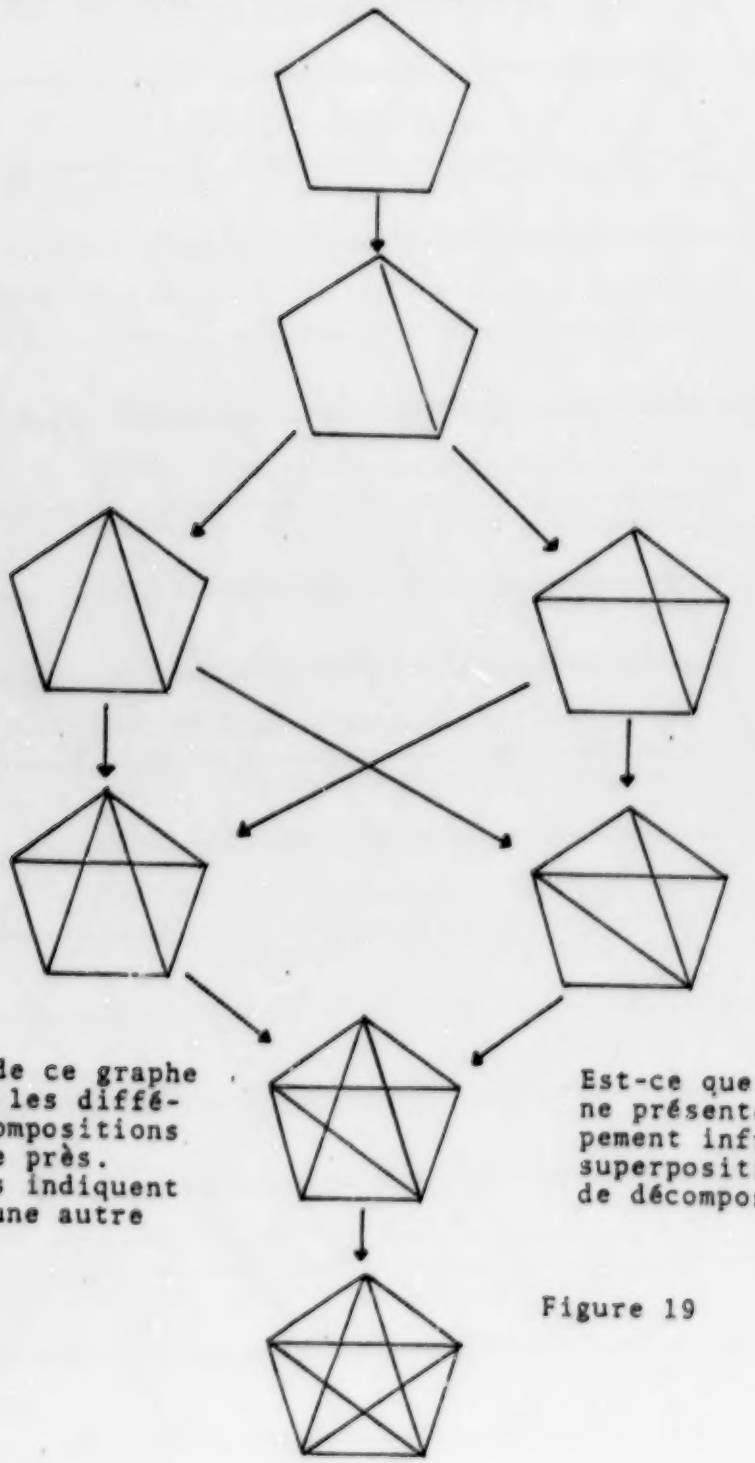

VERT
BLANC
JAUNE
VERT
PALE
ROUGE
BLANC
VERT
PALE
ROUGE
BLANC
BLANC
ROUGE
BLANC
BLANC
ROUGE
BLANC
ROU
GE
BLANC
BLANC
BLANC
BLANC
BLANC
BLANC
BLANC
BLANC

Figure 18



(b) Un pentagone régulier peut être décomposé en 2 parties disjointes en le coupant d'un sommet à un autre. Ces coupures peuvent être superposées. Le graphe ci-après montre les décompositions essentiellement différentes que l'on reçoit de cette manière:



Les états de ce graphe présentent les différentes décompositions à isométrie près. Les flèches indiquent l'ajout d'une autre coupure.

Est-ce que ce graphe ne présente pas un groupement infra-logique de superposition complète de décomposition?

Figure 19

2.4 Groupement infra-logique de superposition partielle de décompositions.

La situation pour ce groupement est la même qu'en 2.3. Cependant, de la même façon qu'à 1.4, on admet des opérations qui ne décomposent pas, à la fois, toutes les parties d'une décomposition donnée. Il n'est pas nécessaire de formuler explicitement ce type de groupement parce qu'il est exactement analogue à 2.3 ou à 1.4 respectivement.

Exercice: Elaborer (au moins partiellement) le groupement infra-logique de superposition partielle de décompositions à partir de l'exemple de la figure 18 (page 95).

Remarque: La considération d'un groupement infra-logique des parties d'une décomposition qui sera l'homologue au groupement de 1.5 présente certaines difficultés parce qu'il n'est pas toujours aisé de vérifier comment les parties de $Z_{(i)}$ peuvent être ordonnées totalement par une relation $\trianglelefteq_i$ (c.f., page 65)

3. Quasi-groupements géométriques.

Dans ce qui précède, nous avons considéré principalement des structures relationnelles (M, Δ) telles que $(M, \trianglelefteq)$ forme des treillis. ($\trianglelefteq$ était alors engendré par Δ comme fermeture réflexo-transitive). Ces structures ont été formellement

définies comme des groupements (de treillis). Occasionnellement il est arrivé que Δ était telle que $(M, \measuredangle)$ n'était plus un treillis. Mais dans ces cas $(M, \measuredangle)$ était au moins encore une structure d'ordre.

Dans le domaine de la géométrie (entre autre) nous trouvons parfois des situations dont la structuration donne lieu à la formation de "systèmes relationnels" qui diffèrent essentiellement des groupements de treillis, mais qui ont encore tant de propriétés communes avec ces derniers que nous les appelons des quasi-groupements géométriques. Voici un exemple:

Soit $E_n = \{A, B... \}$ l'ensemble des figures composées de n triangles équilatéraux (dessinées sur un grillage triangulaire ou découpées dans du carton. Dans E_n nous identifions les figures qui sont l'image l'un de l'autre par une isométrie. Dans E_n on définit une relation Δ comme suit:

$\Delta = \{(X, Y) / X, Y \in E_n$ et Y s'obtient par X en déplaçant un et un seul triangle$\}$

(E_n, Δ) est alors une structure relationnelle avec les propriétés suivantes:

- Les éléments de Δ sont partiellement composables:

  $(X, Y) \circ (Y, Z) = (X, Z)$

  (X, Z) n'est plus nécessairement élément de Δ ; mais $E_1 \times E_n$ est engendré par $\Delta \cup \Delta^{-1}$.

- La composition $\circ$ est associative.

- Les opérations sont réversibles:

$$(X, Y) \circ (Y, Z) \circ (Z, Y) = (X, Y)$$

- Il existe des opérations identiques:

$$(X, Y) \circ (Y, X) = (X, X)$$

$$(X, Y) \circ (Y, Y) = (X, Y)$$

Mais, contrairement au cas de groupements de treillis, l'ensemble Δ des opérations élémentaires n'est plus tel qu'il permettra de définir une relation d'ordre $\trianglelefteq$ qui fera que $(E_n, \trianglelefteq)$ soit un treillis. Voici les cas concrets (E_4, Δ) (E_5, Δ) et (E_6, Δ).

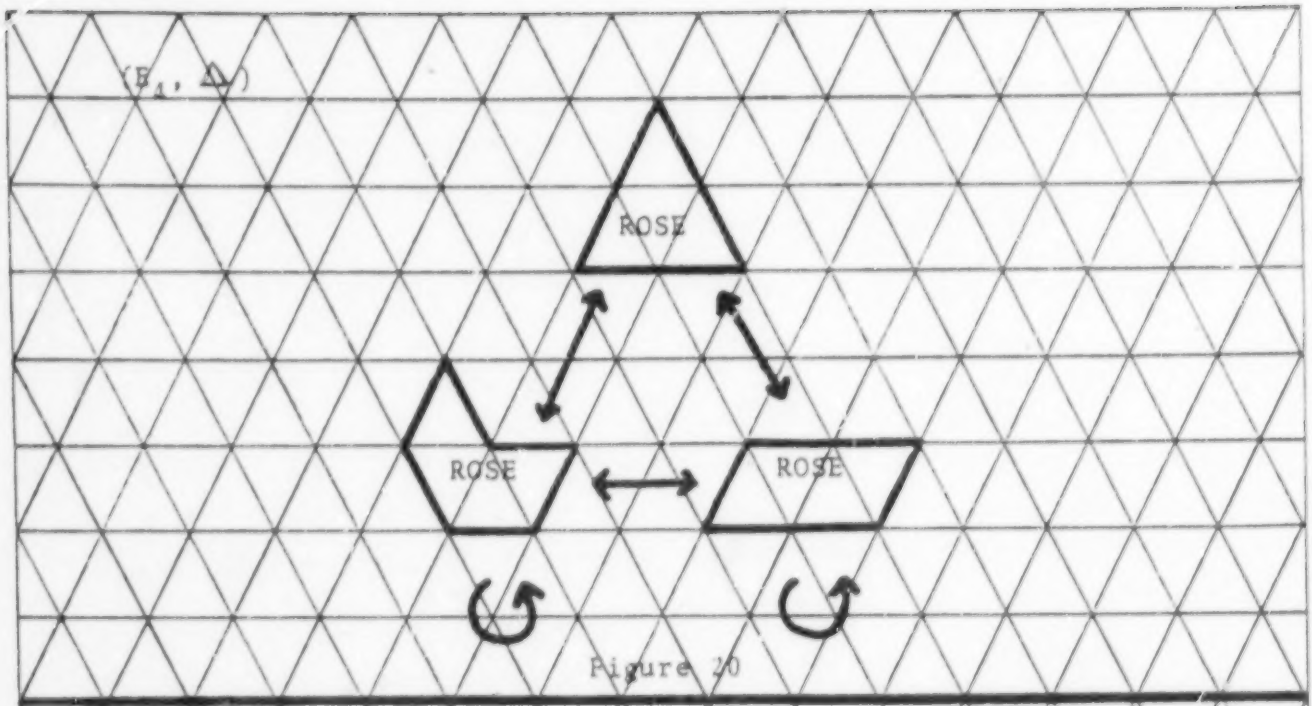


Figure 20

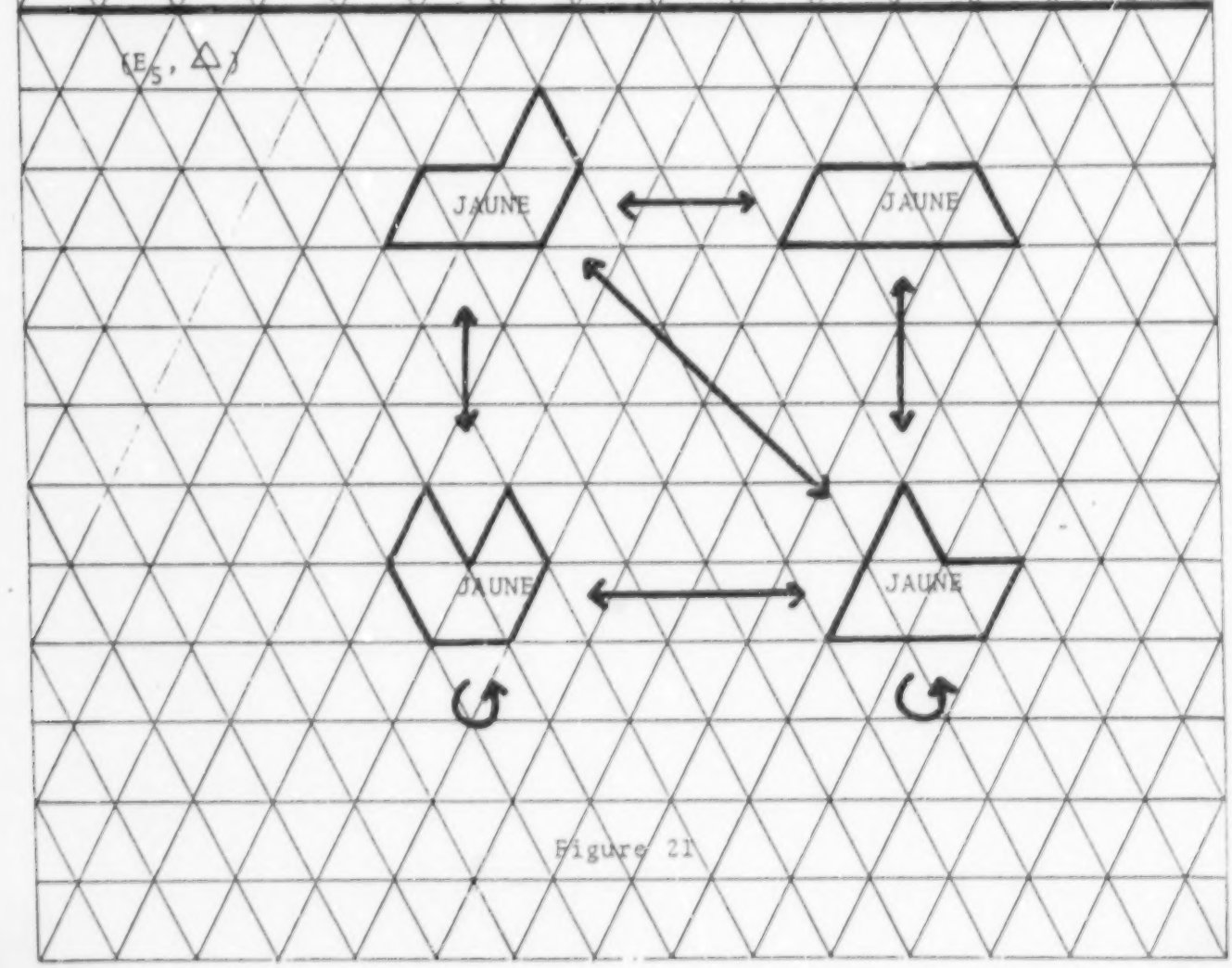


Figure 21

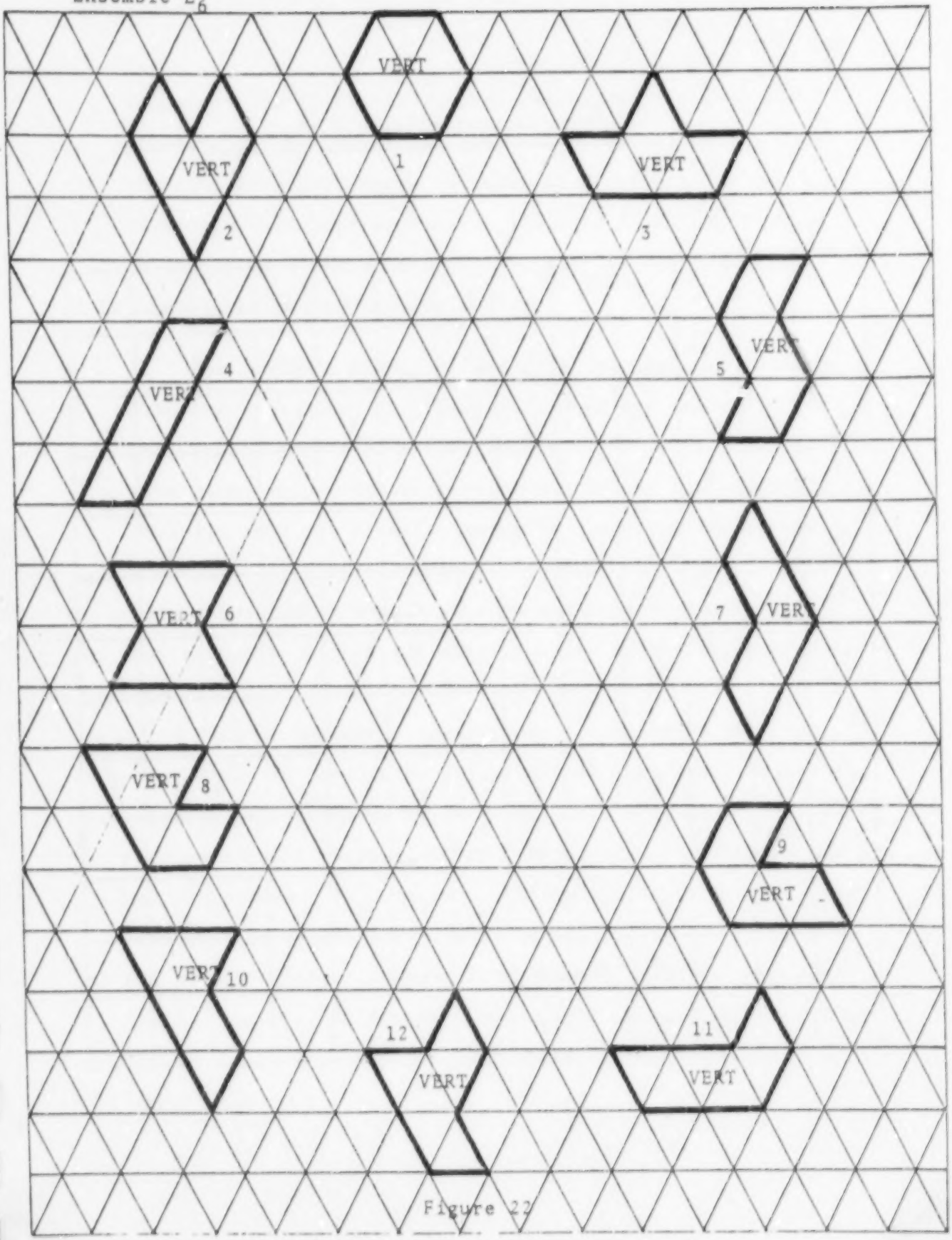

VERT
1
VERT
2
VERT
3
VERT
4
VERT
5
VERT
6
VERT
7
VERT
8
9
VERT
VERT
10
12
VERT
11
VERT

Figure 22

La structure relationnelle (E_6, Δ)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		x						x	x			
2	x		x			x		x	x	x		x
3		x		x		x		x		x	x	x
4			x							x	x	
5							x	x	x	x	x	x
6		x	x					x		x		x
7					x			x	x	x	x	x
8	x	x	x		x	x	x		x	x	x	x
9	x	x			x		x	x		x	x	x
10		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
11			x	x	x		x	x	x	x	x	x
12		x	x		x	x	x	x	x	x	x	x

La parenté de telles structures relationnelles avec des groupements est encore soulignée si l'on considère que ces "opérations géométriques" permettent de structurer une situation géométrique de manière analogue à la constitution de relations d'ordre de type "logique" ou "infra-logique" par les opérations correspondantes.

Ces derniers exemples font déjà supposer que la formalisation du concept de groupement, bien que satisfaisante pour un bon nombre de situations, pourrait être trop restrictive pour inclure toutes les situations que l'on aimerait analyser sous cet aspect. En effet, les premiers travaux concernant la généralisation du concept ont déjà été effectués par WITTMANN même. Nous nous proposons également de contribuer à ces travaux dans le cadre du projet de recherche.

Dans ce qui suit, nous visons à décrire le rôle que peut jouer le concept de groupement dans le cadre de recherches en didactique de la mathématique. Pour ce faire, nous esquisserons d'abord quelques aspects caractéristiques de cette science. Ensuite nous tenterons d'élaborer en ce qui concerne le processus de la rationnalisation des interventions didactiques au moyen d'un exemple. Enfin, nous placerons les travaux de maîtrise dans le contexte du projet de recherche de l'équipe de didacticiens du département de mathématique.

Chapitre IV

Le concept de groupement et le processus de la rationalisation des interventions didactiques.

1. La rationalisation des interventions didactiques[1].

1.1 Introduction

a. Le dilemme de la recherche en didactique de la mathématique.

Une des caractéristiques les plus importantes de la didactique de la mathématique est son aspect multidisciplinarité. En effet, nous pouvons déceler au moins les trois disciplines suivantes: la mathématique, la pédagogie, la psychologie: lesquelles y interviennent avec toutes leurs spécialités respectives et desquelles nous devrions tenir compte en travaillant dans ce domaine. La plupart des travaux en didactique de la mathématique ne réussissent pas à établir un bon équilibre au moins entre ces trois composantes majeures.

Souvent nous observons un transfert inadapté des méthodes de travail des autres sciences. Ainsi on retrouve en didactique de la mathématique des métho-

1. Conférence donnée à la Faculté des Sciences de l'Education de l'Université de Erlangen-Nuernberg à Bayreuth et à l'Institut de la didactique de la mathématique de l'Université de Bielefeld. (1974)

des de recherches mathématiques, différents types de recherches en éducation, des méthodes de recherches en sciences pures, différentes méthodes de recherches en psychologie, etc. On peut avoir l'impression que beaucoup de ces travaux ne considèrent pas la possibilité qu'aucune de ces méthodes ne soit adaptée au caractère particulier de cette nouvelle science. La didactique de la mathématique est une science "in statu nascendi" avec des domaines nouveaux de problèmes et de méthodes qui ne peuvent pas être intégrés ni dans la mathématique, ni dans la pédagogie, ni dans la psychologie.

La didactique de la mathématique est, comme beaucoup d'autres domaines interdisciplinaires de recherche, un champ d'activités scientifiques dont le développement ébranle des classifications traditionnelles[1] et qui peut introduire des manières non-conventionnelles de pensée.

Envisagé sous un autre angle, deux tendances extrêmes s'opposent dans des travaux de recherche en didactique de la mathématique. D'une part, nous trouvons des expériences minutieusement contrôlées et utilisant des méthodes statistiques d'analyse très élaborées. Les résultats de ces travaux sont, à cause de la restriction de l'objet de recherche nécessitée par le contrôle à faire

1. A.Z. KRYGOWSKA, Le rôle de la didactique de la mathématique dans les études du futur enseignant, Conférence donnée au département de mathématique de l'Université du Québec à Montréal, 22 août 1973.

sans aucune signification. D'autre part, nous trouvons des procédures de recherches très intuitives et non contrôlées dont les résultats ne peuvent fournir que des intuitions vagues.

b. La réalité de la pratique de l'enseignement.

Il est indubitable que la pratique de l'enseignement ne peut tirer profit de la plupart des recherches en didactique de la mathématique parce que leurs résultats sont ou bien trop particuliers ou bien trop vagues.

Pourtant, le praticien de l'enseignement attend que la recherche en didactique lui fournisse des suggestions concrètes et raisonnables pour l'amélioration de son enseignement. Au lieu de cela, l'enseignant est forcé de fonder ses actions sur son intuition, sur des programmes composés de manière assez arbitraire ou sur des hypothèses qui sont difficiles à justifier, etc.

c. Conditions pour l'amélioration de la situation.

Pour que ce dilemme de la didactique de la mathématique puisse être aboli, il nous semble nécessaire qu'au moins les conditions suivantes soient satisfaites:

i) La collaboration de représentants des diverses sciences et des divers domaines d'expériences concernés: pédagogues, psychologues, mathématiciens, administrateurs,

enseignants etc. Il est impossible de retrouver toutes ces compétences dans une même personne; la collaboration cependant peut être profitable pour chacune de ces personnes et enrichir son domaine d'expérience.

ii) La possibilité d'élaborer des méthodes de recherches relativement indépendantes et qui sont propres à la didactique de la mathématique; ceci inclut le risque d'expérimenter des méthodes non-conventionnelles.

iii) L'essai d'identifier des sous-processus importants du processus d'apprentissage en mathématique par des expériences qui peuvent être contrôlées de manière raisonnable.

iv) L'orientation de la recherche vers des applications directes dans l'enseignement. Ceci offre les avantages qu'on ne gaspille pas trop d'énergie dans des théories non applicables, que les théories soient toujours vérifiées dans la réalité et qu'ainsi le conflit d'idéologie soit minimisé.

Un résultat de recherche devrait toujours inclure une suggestion concrète d'enseignement, qui dit quels sont les événements qui se passent, quand ils se passent, comment et pourquoi ils se passent et qui transmet ainsi le résultat pratique de cette recherche directement au practicien.

Dans les premiers travaux de maîtrise en enseignement élémentaire (mathématique) nous avons essayé de tenir compte de ces conditions. Nous en donnons, ci-après, un exemple dans le domaine de l'enseignement de la géométrie à l'élémentaire.

1.2 Figures géométriques (solides) dans l'enseignement de la géométrie à l'élémentaire.

a. La situation de l'enseignement de la géométrie à l'élémentaire (au Québec).

La situation de l'enseignement de la géométrie à l'élémentaire au Québec est caractérisée, comme probablement dans beaucoup d'autres pays, par un haut degré d'insécurité:

-des approches traditionnelles et des contenus conventionnels sont, partiellement avec raison, fortement critiqués et

-des conceptions plus modernes manquent, au moins du point de vue de l'enseignement, de clarté et de réalisme.

Cette situation engendre un immense besoin pour des suggestions concrètes d'enseignement desquelles l'enseignant peut apprendre non seulement le contenu, mais aussi l'esprit d'un enseignant renouvelé de la géométrie.

Des essais pour satisfaire à ce besoin n'ont pas eu trop de succès jusqu'à présent et ceci, probablement, à cause du caractère fragmentaire de ces suggestions. Ce caractère fragmentaire se manifeste plus particulièrement aux niveaux

-de la continuité du développement de concepts géométriques

-de la graduation selon le développement mental de l'enfant

-de l'intégration possible dans des programmes existants etc.

Bref, on dirait que ces suggestions ne satisfont pas particulièrement du point de vue de la rationalisation des interventions didactiques.

b. Des solides dans l'enseignement de la géométrie.

Le thème des solides et des formes géométriques fournit un exemple caractéristique pour cette situation. La plupart des suggestions pour une réforme de l'enseignement de la géométrie souligne l'importance des formes géométriques (de 3 et de 2 dimensions) pour la formation de concepts et l'élaboration de relations qualitatives. Dans la pratique, cependant, seulement quelques exemples très particuliers sont étudiés afin de pouvoir introduire quelques relations quantitatives (mesurer) sans avoir exploité les relations qualitatives qui caractérisent ces objets.

Par contre, des analyses de ce thème, des points de vue mathématique et psycho-pédagogique et du point de vue de la pratique de l'enseignement montrent que c'est un exemple par excellence pour un thème polyvalent de l'enseignement de la géométrie:

i) Il permet de développer, de manière naturelle, des concepts fondamentaux de géométrie.

ii) Il rend possible la formation des concepts géométriques en tenant compte du développement mental de l'enfant.

iii) Il fournit l'occasion d'opérationaliser des objectifs généraux de l'enseignement de la mathématique par la possibilité d'élaboration de situations d'apprentissage.

iv) Il permet de diriger le processus d'apprentissage (indirectement) par la variation des situations concrètes.

v) Finalement, il s'intègre facilement dans des programmes courants et il permet de maintenir le lien avec l'environnement naturel de l'enfant

Ces réflexions, basées sur des discussions avec des collègues mathématiciens, avec des pédagogues et des psychologues et avec des collègues de la pratique de l'enseignement, nous ont amenés à envisager l'élaboration de ce thème pour l'enseignement de la géométrie au 2e cycle de l'élémentaire.

c. Une première approche du thème: "les parents du cube"

Pour une première approche du thème en question nous nous étions préoccupés d'élaborer une unité d'enseignement qui pourrait s'intégrer facilement dans un programme d'enseignement normal, qui correspondrait autant que possible aux expériences antérieures des élèves et qui satisferait un certain besoin des enseignants.

Du point de vue didactique-psychologique, nous voulions envisager une formation progressive de concepts par une structuration graduelle d'une situation concrète donnée; nous cherchions une approche qui amènerait l'élève à partir de considérations globales, en passant par l'identification de propriétés pertinentes à la description et à la définition d'objets géométriques. Nous envisagions en plus de provoquer l'interaction entre des "rapports d'expérience" et des "projets d'étude" qui a été observée déjà dans des expériences semblables[1]. Enfin, nous essayions de trouver un chemin partant de la manipulation d'objets concrets et amenant à des activités intellectuelles par "l'intériorisation" des actions concrètes.

Du point de vue mathématique nous nous étions préoccupés de créer une situation qui serait facile à structurer,

1. D. Lunkenbein, Une contribution au sujet de "La méthode axiomatique dans l'enseignement de la géométrie", thèse de doctorat, Faculté des Sciences de l'Education, Université Laval, Québec 1973.

qui tiendrait compte des concepts déjà élaborés par les élèves et qui serait destinée à approfondir ces concepts et à les compléter par l'introduction de notions parentes.

Ces réflexions nous amenaient à l'élaboration (théorique et pratique) d'un ensemble de solides, que l'on pourrait appeler "les parents du cube", lequel ensemble représente la classe projective des hexaèdres simples convexes à 8 sommets et à 12 arêtes.[1] Cette classe peut être décrite brièvement comme suit:

paires de faces parallèles

quadruplets d'arêtes parallèles	0	1	2	3
0	(0,0)	(0,1)		
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	
2		(2,1)	(2,2)	
3				(3,3)

Figure 1

Cet ensemble de solides comprend entre autre:

---

1 Voir "Document de recherche en enseignement de la mathématique" (enseignement de la géométrie à l'élémentaire) - Document de travail du 26-2-74.

a) des types de prismes hexaèdres

b) des types de parallélépipèdes

c) des types des troncs de prismes (hexaèdres)

d) des solides droits et non-droits (où cette propriété est applicable)

e) des types importants de quadrilatères comme des faces de solides.

d. Planification et exécution d'une expérience.

Puisque d'une part, nous voulions savoir comment et jusqu'à quel niveau les concepts en question pourrait être élaborés et puisque d'autre part, nous recherchions comment et jusqu'à quelle mesure les élèves pourraient être engagés tant dans des processus de structuration, que dans des processus de formation de concepts et de définition, il n'était alors pas possible de préparer à long terme l'unité d'enseignement. A part l'analyse des concepts mathématiques impliqués et l'analyse des possibilités d'engendrer certains processus de pensée la préparation de l'unité se faisait petit à petit en tenant compte des réactions des élèves et de la direction qu'ils avaient choisie dans leurs démarches.

L'expérience a été menée avec 39 élèves d'une 6e année de l'école Carillon de Sherbrooke au printemps 1974. Comme contrôle nous nous servions:

a) des travaux écrits et oraux des élèves

b) de la comparaison des préparations détaillées et des rapports d'expériences élaborés après chaque instant d'expérimentation.

e. Déroulement de l'expérimentation et quelques résultats.

Le déroulement de l'expérimentation est schématiquement décrit dans le tableau 1 ci-après. A part le déroulement de l'enseignement, ce tableau montre certaines étapes de la formation de concepts ou il indique l'emploi de concepts déjà élaborés. Enfin, nous pouvons y observer des phases marquantes du processus d'apprentissage.

CHEMINEMENT DU LA RECHERCHE SUR LA STRUCTURATION DE L'ENSEMBLE DE POLYEDRES U(8,12), LES PARENTS DU CUBE

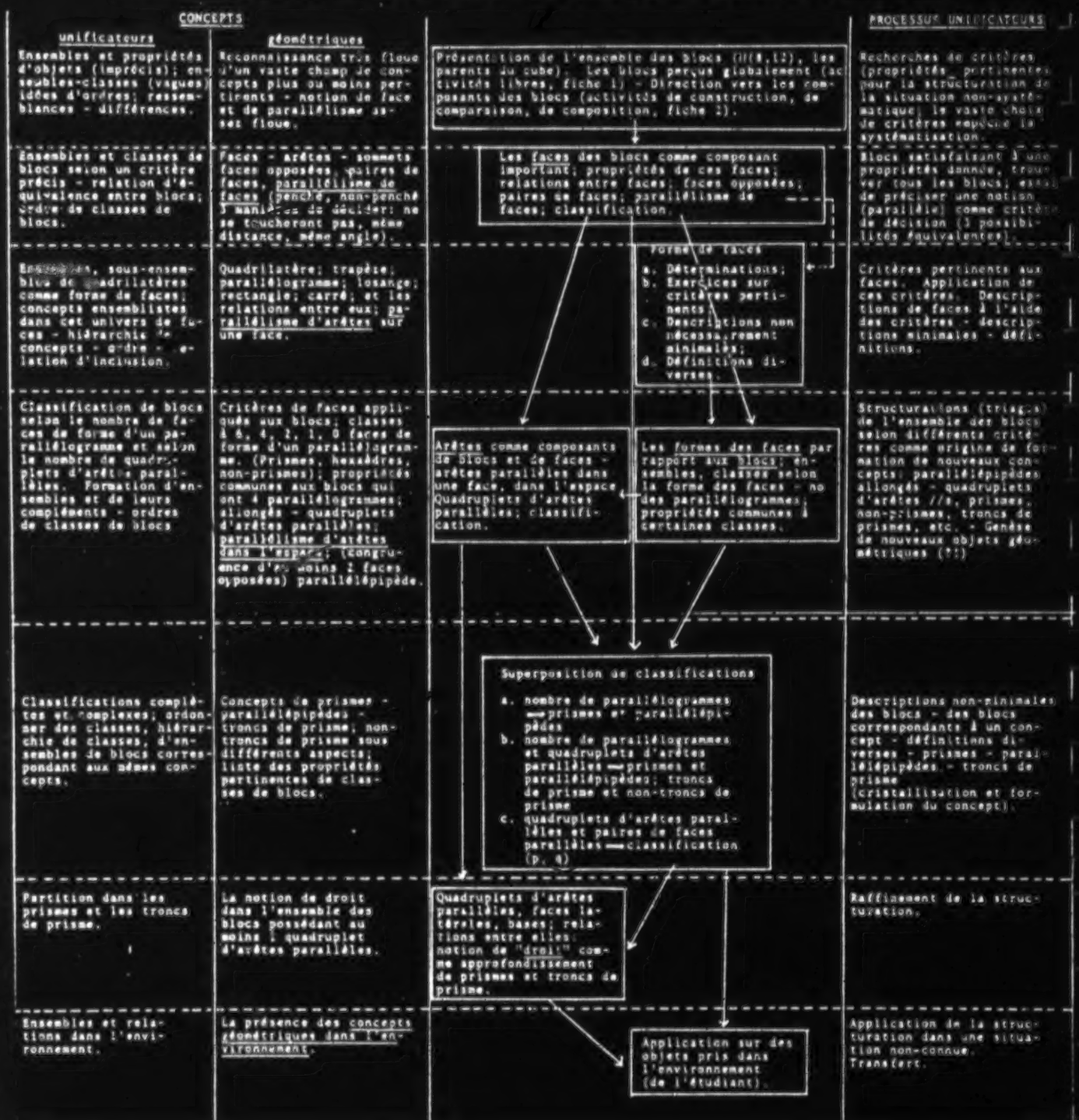
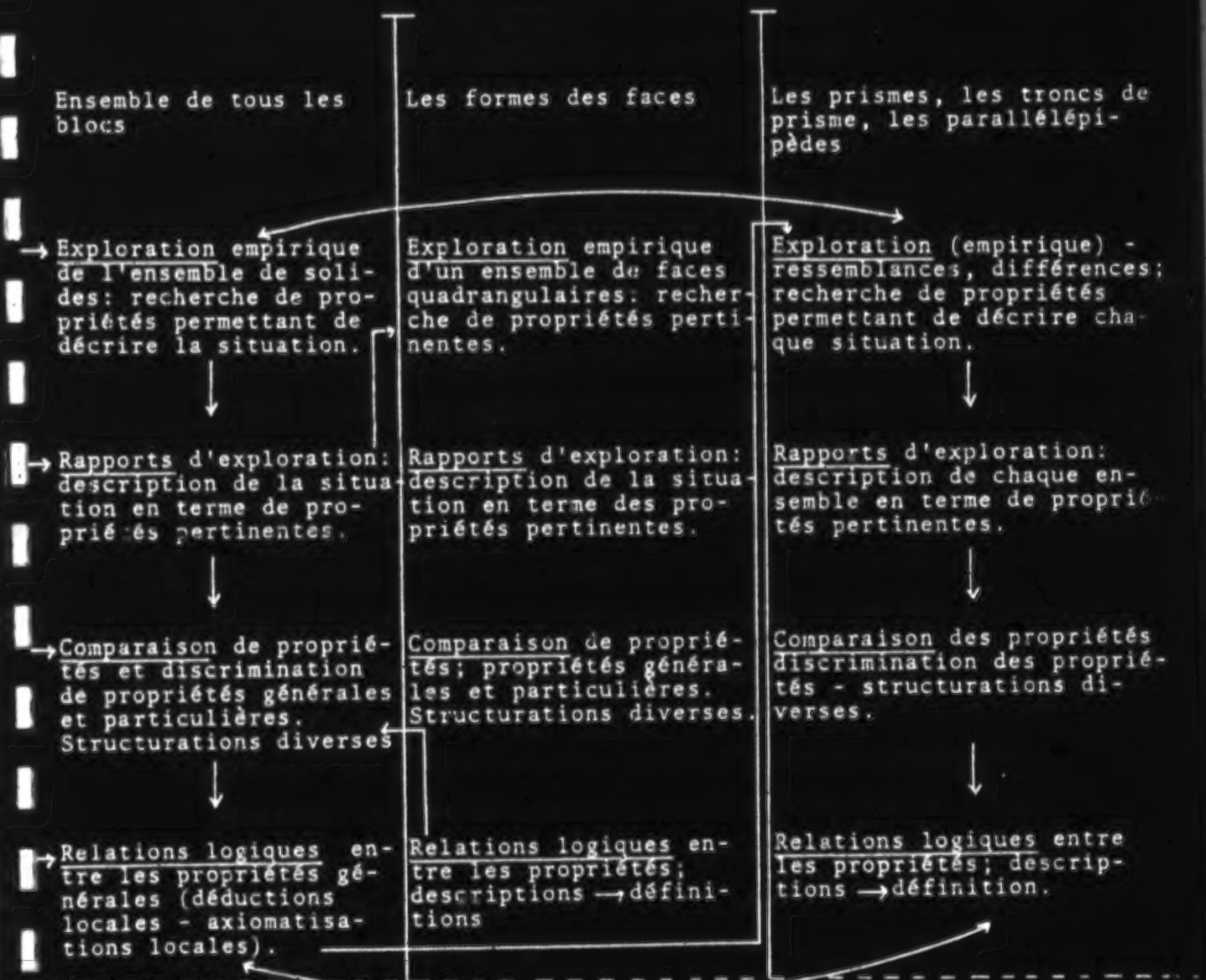


Schéma de structuration de l'ensemble d'hexaèdres à 8 sommets et à 12 arêtes



Au cours de cette expérience nous avons pu observer que la plupart des élèves se sont impliqués dans des processus de pensée comme suit

i) l'identification de propriétés pertinentes pour la structuration de la situation donnée.

ii) l'interaction entre rapports d'étude et projets d'étude[1] (voir tableau 2)

iii) le discernement graduel d'un concept de l'intuition et de l'objet concret.

iv) l'élaboration de définitions

v) la genèse de nouveaux concepts

vi) des déductions simples locales

vii) une indépendance graduelle dans le choix des procédures de recherches

Ces activités nous ont paru être des composantes importantes du processus d'apprentissage en mathématique et le fait qu'elles ont pu être engendrées par cette unité d'enseignement nous incite à la juger efficace et stimulant. Comme résultat pratique d'une telle expérience, il serait sans doute important de rédiger une unité d'enseignement sous forme de séquence de situations d'apprentissage en précisant les objectifs et les résultats escomptés afin d'en rendre l'utilisation possible par tout enseignant en exercice.

---

1. cf l'annotation de la page 112.

1.3 Conclusion

Nous n'avons aucunement l'intention de généraliser les résultats de tels travaux isolés. L'objectif principal d'un tel travail se veut d'abord de décrire, autant que possible, toute intervention didactique; ensuite de tenter de justifier, dans la mesure du possible, toutes ces actions didactiques; enfin, de rapporter et d'analyser le plus grand nombre possible d'effets produits par ces actions. Nous identifions une telle procédure comme un processus de la rationalisation des interventions didactiques.

Une telle recherche pourrait encore offrir un thème précis d'enseignement au praticien qui s'y intéresserait pourvu que celui-ci ne perde pas de vue la relativité du thème considéré et qu'il n'en interprète pas les données comme un résultat définitif.

Comme travail isolé, une telle recherche pourrait être considérée comme démonstration d'existence[1] de certains processus ou sous-processus et ainsi pourrait-elle fournir des indications précieuses pour des recherches plus élaborées. De plus, nous espérons que des séries de travaux analogues, dans des domaines différents, puissent faire ressortir des données générales du processus d'apprentissage en mathématique. Dans ce sens nous prévoyonsque de tels travaux puissent contribuer:

---

1. Voir l'annotation de la page 106.

- à l'amélioration de l'enseignement de la mathématique;
- à la résolution de problèmes fondamentaux de la recherche en didactique;
- au développement de la didactique de la mathématique comme science.

2. Le concept de groupement en tant qu'outil de la rationalisation des interventions didactiques.

Considérant l'exemple de la recherche didactique portant sur les hexaèdres, à l'aide duquel nous avons décrit le processus de la rationalisation des interventions didactiques, nous constatons une certaine faiblesse en ce qui a trait à l'aspect psychologique-pédagogique de cette recherche. L'analyse pré-expérimentale ainsi que le profil d'expérimentation (tableau) montrent une forte dominante des critères mathématiques, tandis que les critères de nature psychologique-pédagogique n'y jouent qu'un rôle secondaire. Ceci est dû au manque de critères précis relevant du domaine de la psychologie ou de la pédagogie et applicables à l'analyse ou à la conception de situations d'apprentissage.

Concernant les situations concrètes d'apprentissage, le concept de groupement pourra être utile pour une structuration non mathématique:

-Situation ouverte-situation dirigée: Une même situation d'apprentissage peut engendrer la formation de groupement divers. Peut-on caractériser une situation d'apprentissage selon le nombre de groupements différents susceptibles d'être formés à partir d'elle?

-Opérations fondamentales de la pensée: Piaget prétend que les différents types de groupements indiqués dans sa classification correspondent à des opérations fondamentales de la pensée. Peut-on concevoir des situations d'apprentissage visant à engendrer des opérations fondamentales particulières de la pensée?

-Echelle de complexité: A l'aide de notions comme sous-groupement, isomorphisme de groupements, etc. il semble être possible d'élaborer une notion de complexité d'un groupement. Peut-on ainsi établir une notion de complexité pour des situations concrètes d'apprentissage?

-Rôle unificateur du groupement: Des situations d'apprentissage très variées donnent lieu à la formation du même type de groupement, et ainsi les mêmes démarches intellectuelles s'appliquent à des situations diverses d'apprentissage. Peut-on se servir du concept de groupement pour classer des situations d'apprentissage par les démarches intellectuelles impliquées?

Ainsi, nous semble-t-il évident que le concept de groupement, dans sa formalisation précisée, peut servir comme

outil important pour la rationalisation des interventions didactiques et permettre de structurer et d'analyser le contexte psychologique-pédagogique de situations d'apprentissage.

3. Les travaux de maîtrise et le projet de recherche de l'équipe des didacticiens du département de mathématique.

Le projet global de recherche qui vise à rationaliser les interventions didactiques en explorant, entre autres choses, le concept de groupement en tant qu'outil d'un tel processus, doit considérer systématiquement (ou moins) les trois aspects suivants:

-l'aspect mathématique: L'étude structurale du concept de groupement basée sur les travaux de WITTMANN et STEINER et la recherche d'exemples pertinents dans le cadre de la didactique mathématique.

-l'aspect psychologique-pédagogique: L'étude de types de groupements, de leurs processus de formations des relations entre la formation de groupements et la formation de concepts mathématiques.

-l'aspect pratique: L'élaboration pratique de thèmes mathématiques en vue de leur enseignement laquelle sera basée sur la structure du groupement et sur le modèle du processus de sa formation.

Ces aspects, que l'on distingue surtout pour des fins de systématisation, n'ont guère de signification si on les considère séparément. Ils influent les uns sur les autres et ils se fécondent mutuellement. Les travaux pratiques, cependant, peuvent être considérés comme les germes qui induiront les activités de nature plus théoriques (du côté mathématique et du côté psychologique-pédagogique). Ils offriront également un point de référence qui permettra de valoriser les travaux théoriques et d'évaluer leurs modèles. Aussi sommes-nous tentés de décrire les inter-relations entre ces trois aspects par le graphe suivant:

Figure 2

Les travaux de maîtrise, dans l'optique même de ce programme, toucheront plus particulièrement l'aspect pratique du projet. Ainsi, pourront-ils suggérer des applications de modèles théoriques ou fournir des élaborations de modèles précis, ne négligeant pas l'objectif primordial qui est de donner au praticien de l'enseignement des suggestions concrètes et de lui indiquer, dans la mesure du possible, ce qui se passe dans l'appprentissage d'une notion quelconque quand, comment et pourquoi il en est ainsi.

Divers groupements sur les quadrilatères

Travail final du cours MAT 4823
(Groupements)

par: Louise Aubin
Richard Bibeau
Paul De La Chevrotière
Marcel Hamel

Université de Sherbrooke
Département de mathématiques
Section "enseignement"
15 décembre 1975.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1

Groupement logique de superposition complète de partition.

1,1 Définition..... 127

1,2 Formation de partition..... 132

1,3 Formation d'un groupement logique de superposition complète de partitions dans M..... 150

CHAPITRE 2

Groupement logique des classes des partitions de M.

2,1 Groupement logique des classes d'une partition de M..... 159

2,2 Représentation des groupements logiques des classes des partitions de M..... 161

CHAPITRE 3

Groupement booléen.

3,1 Formation d'ensembles dans Q..... 185

3,2 Formation de sous-ensembles..... 195

3,3 Définition du groupement booléen correspondant au groupement de classes selon la partition $Z_{\langle 1,2,3,4 \rangle}$ 201

3,4 Moyen de visualiser la relation d'inclusion du groupement booléen correspondant au groupement de classes selon la partition $Z_{\langle 1,2,3,4 \rangle}$ 203

-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-

1 Groupement logique de superposition complète de partitions.

1,1 Définition:

a) Univers Q:

Construisons un ensemble Q de quadrilatères au moyen des attributs suivants:

$E_1 = \langle$convexe 1, concave 0$\rangle$

$E_2 = \langle 0,1,2,4 \rangle$ angles droits

$E_3 = \langle 0,1,2 \rangle$ paires de côtés parallèles

$E_4 = \langle 0,1,2,4 \rangle$ axes de symétrie

Si ces variables étaient indépendantes nous obtiendrions 96 quadrilatères; mais comme elles sont interdépendantes, nous avons un ensemble fini de 17 quadrilatères.

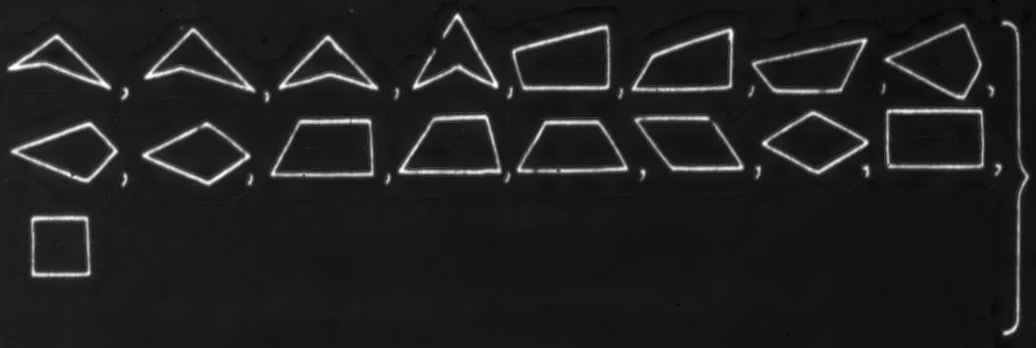
Note:

Chaque quadrilatère doit pouvoir être construit sur le plan matériel, c'est pourquoi ceux du type

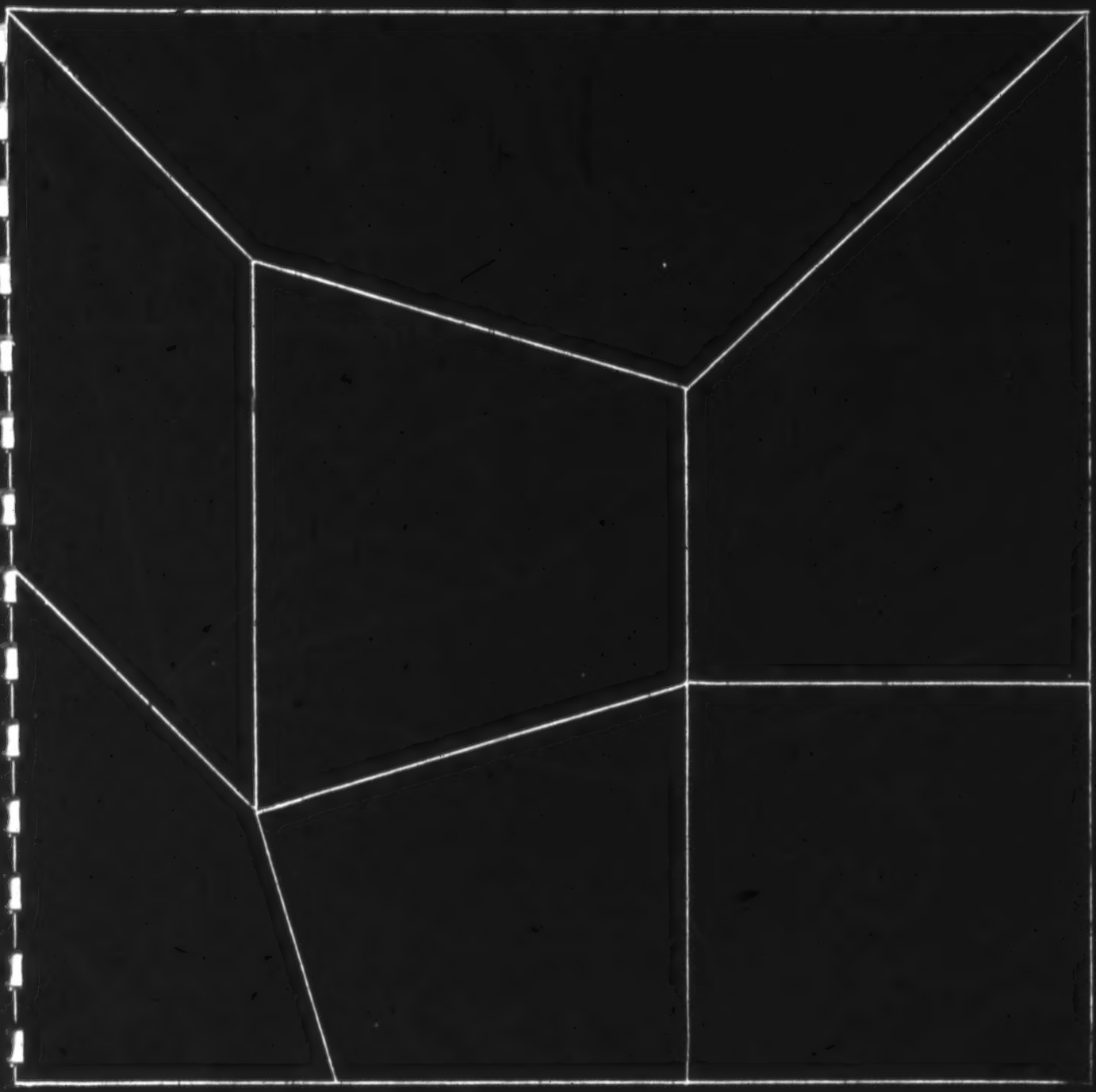
ou etc...

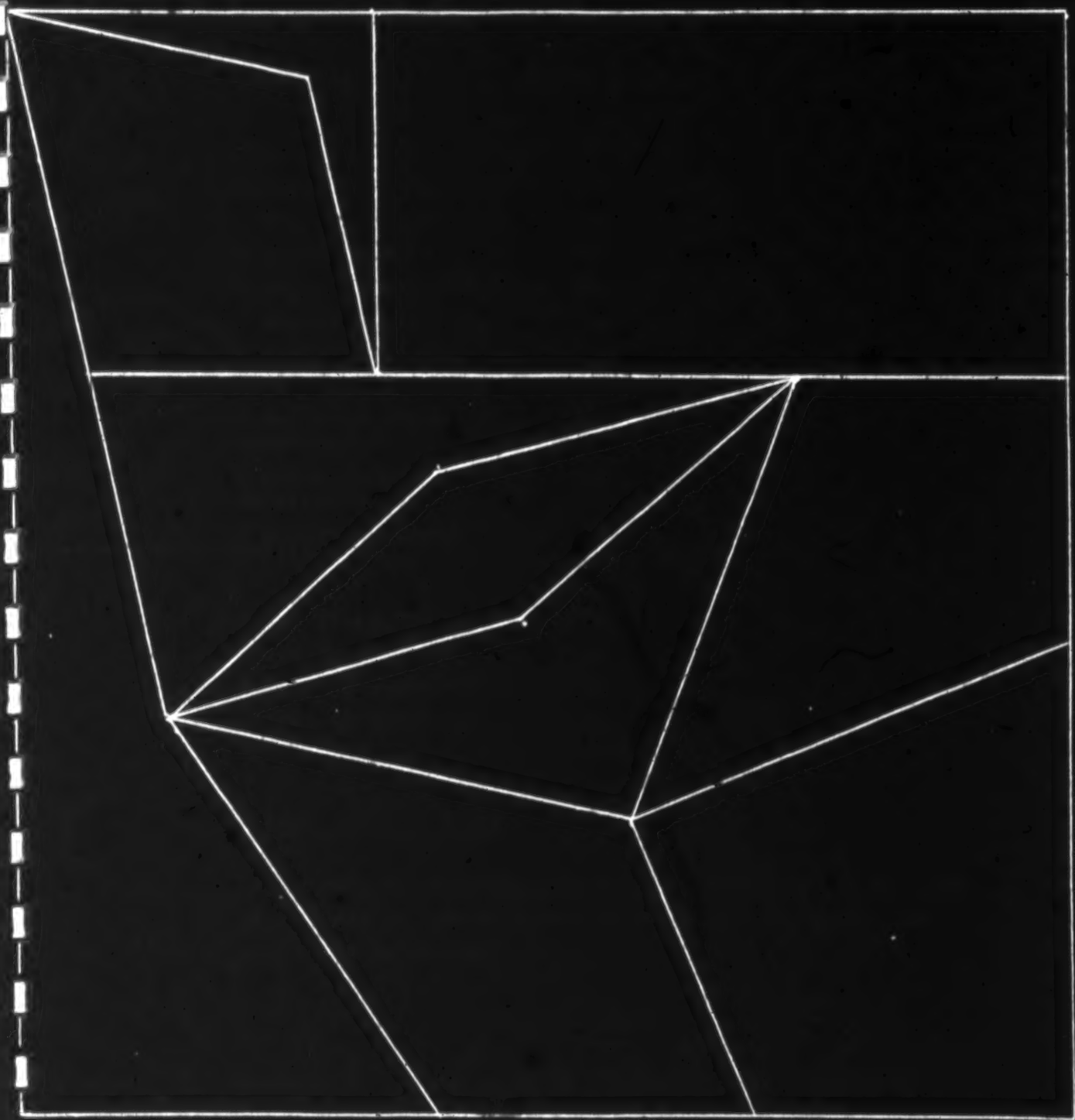
n'appartiennent pas à l'ensemble de départ.

Q défini en extension:

Q = 

Q présenté sous forme de casse-tête. (pages 129 et 130)





b) Notation utilisée:

Attributs	Abréviations	Symboles numériques
Convexe	cx	1
Concave	cv	0
0 angle droit	0d	0
1 angle droit	1d	1
2 angles droits	2d	2
4 angles droits	4d	4
0 paire de côtés parallèles	0p	0
1 paire de côtés parallèles	1p	1
2 paires de côtés parallèles	2p	2
0 axe de symétrie	0s	0
1 axe de symétrie	1s	1
2 axes de symétrie	2s	2
4 axes de symétrie	4s	4

c) Valeur positionnelle:

Les symboles numériques notés plus haut seront utilisés pour désigner les éléments appartenant à Q selon les positions suivantes:

1°	2°	3°	4°
convexité	orthogonalité	parallélisme	symétrie

1,2 Formation de partitions.

Chacun des ensembles d'attributs E_1, E_2, E_3, E_4 induit une partition de Q.
Ainsi "avoir la même orthogonalité" (E_2) qui est une relation d'équivalence induit une partition dans Q composée de quatre classes. Nous désignons par $Z_{\langle 2 \rangle}$ la partition de Q qui est induite par la relation d'équivalence donnée par E_2.
Nous désignons par $Z_{\langle 1,2 \rangle}$ la partition qui est induite par la conjonction des relations d'équivalence données par E_1 et E_2.

On a ainsi un ensemble M formé de seize partitions que l'on peut obtenir en superposant des ensembles d'attributs décrits par E_1, E_2, E_3, E_4.

$$M = \left\{ \begin{array}{l} Z_{\emptyset}, \; Z_{\langle 1 \rangle}, \; Z_{\langle 2 \rangle}, \; Z_{\langle 3 \rangle}, \; Z_{\langle 4 \rangle}, \; Z_{\langle 1,2 \rangle}, \; Z_{\langle 1,3 \rangle}, \\ Z_{\langle 1,4 \rangle}, \; Z_{\langle 2,3 \rangle}, \; Z_{\langle 2,4 \rangle}, \; Z_{\langle 3,4 \rangle}, \; Z_{\langle 1,2,3 \rangle}, \; Z_{\langle 1,2,4 \rangle}, \\ Z_{\langle 1,3,4 \rangle}, \; Z_{\langle 2,3,4 \rangle}, \; Z_{\langle 1,2,3,4 \rangle} \end{array} \right\}$$

Partitions	nombre de classes non vides.
$z_{\emptyset}$	1
$z_{\langle 1 \rangle}$	2
$z_{\langle 2 \rangle}$	4
$z_{\langle 3 \rangle}$	3
$z_{\langle 4 \rangle}$	4
$z_{\langle 1,2 \rangle}$	6
$z_{\langle 1,3 \rangle}$	4
$z_{\langle 1,4 \rangle}$	6
$z_{\langle 2,3 \rangle}$	7
$z_{\langle 2,4 \rangle}$	9
$z_{\langle 3,4 \rangle}$	7
$z_{\langle 1,2,3 \rangle}$	9
$z_{\langle 1,2,4 \rangle}$	13
$z_{\langle 1,3,4 \rangle}$	9
$z_{\langle 2,3,4 \rangle}$	13
$z_{\langle 1,2,3,4 \rangle}$	17

Les 16 figures qui suivent illustrent à l'aide de diagrammes de Carroll les classes pour chacune des partitions.

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON UNE PROPRIETE TOUJOURS VRAIE DANS Q.

$Z\{\emptyset\}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 1
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 0

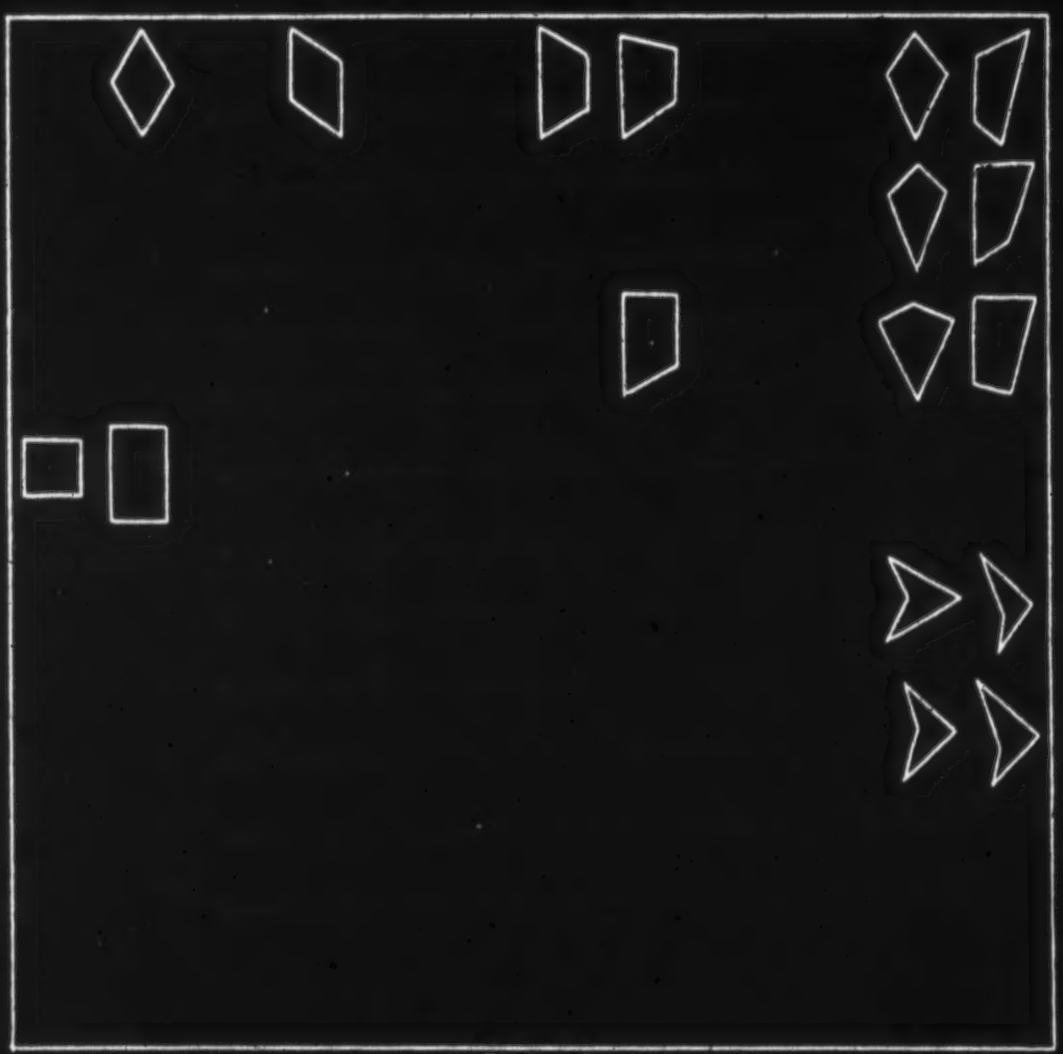


Figure 1

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E1.

$Z_{\{1\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 2
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 0

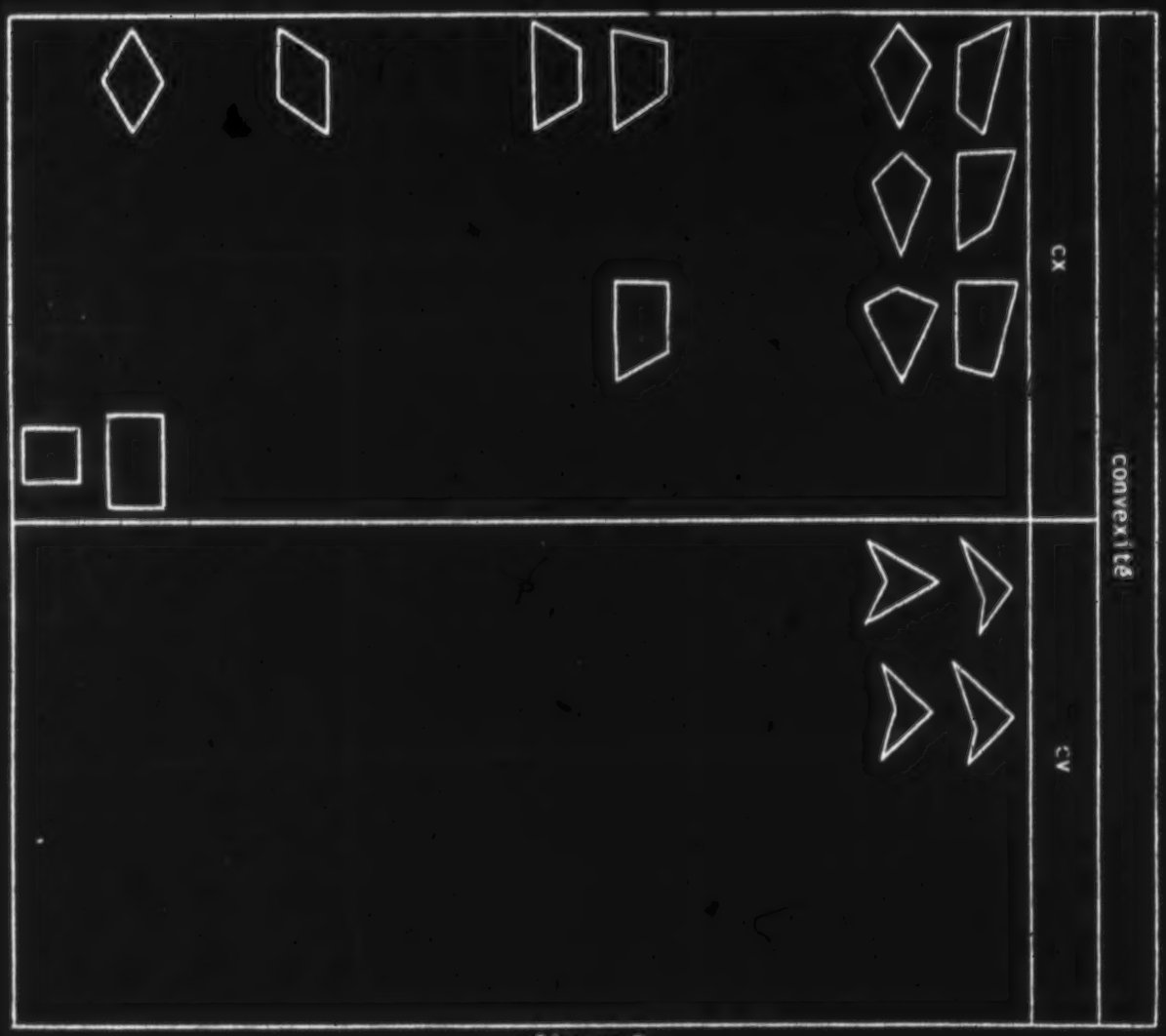


Figure 2

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E2.

$Z_{\{2\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 4
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 0

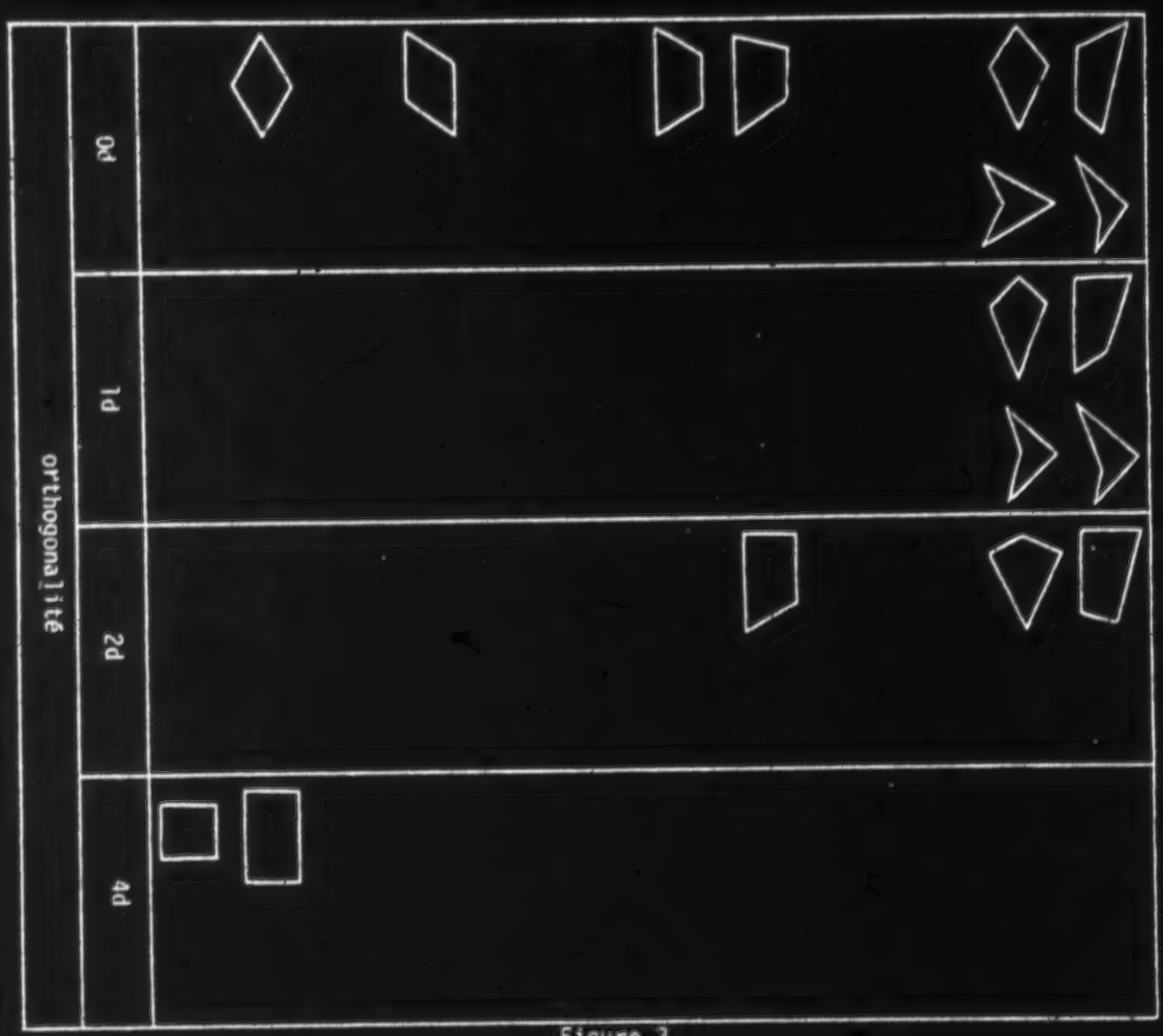


Figure 3

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E3.

$Z_{\{3\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 3
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 0

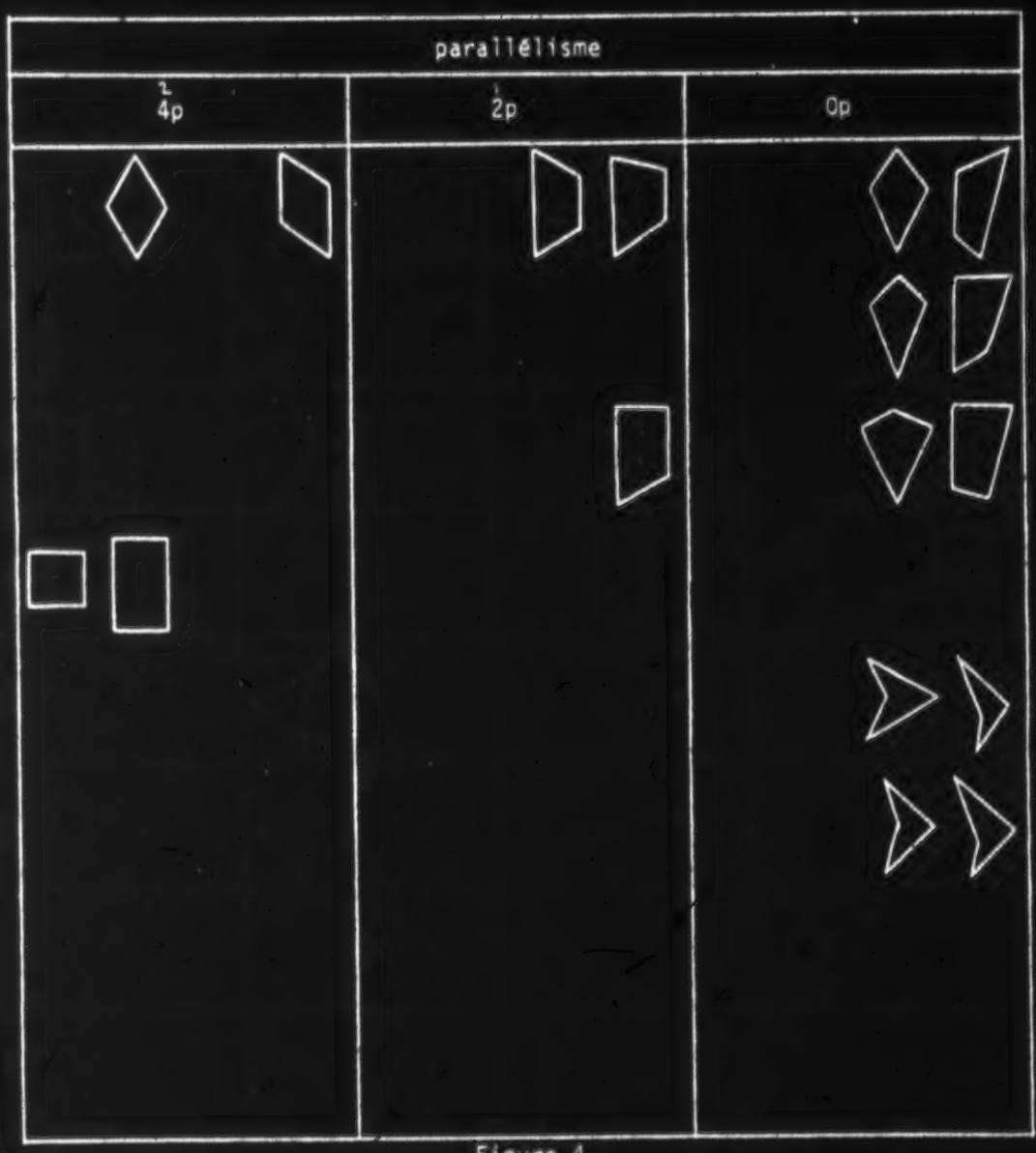


Figure 4

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E4.

$Z_{\{4\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 4
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 0

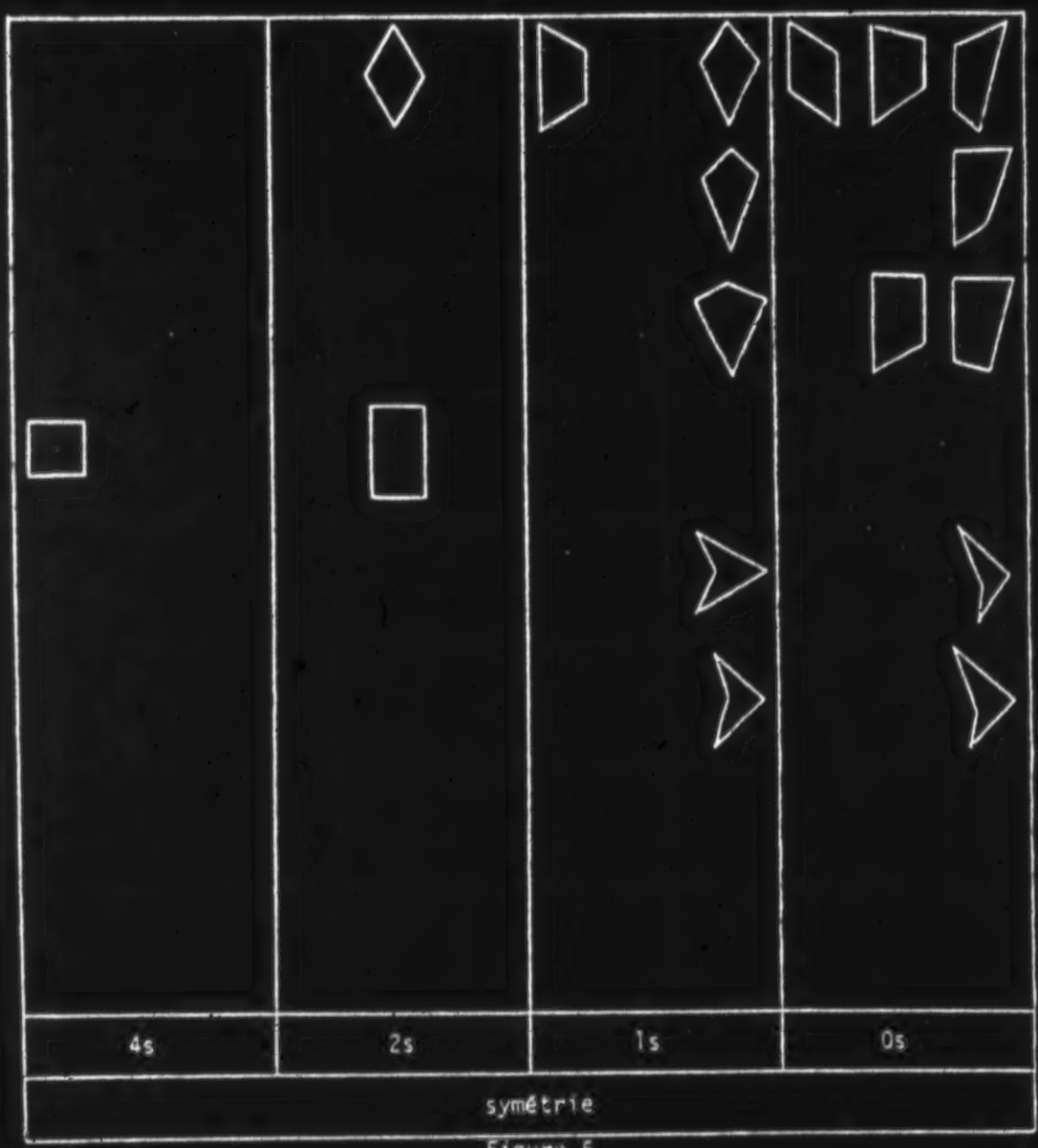


Figure 5

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E1 et E2.

$Z_{\{1,2\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 8
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 2

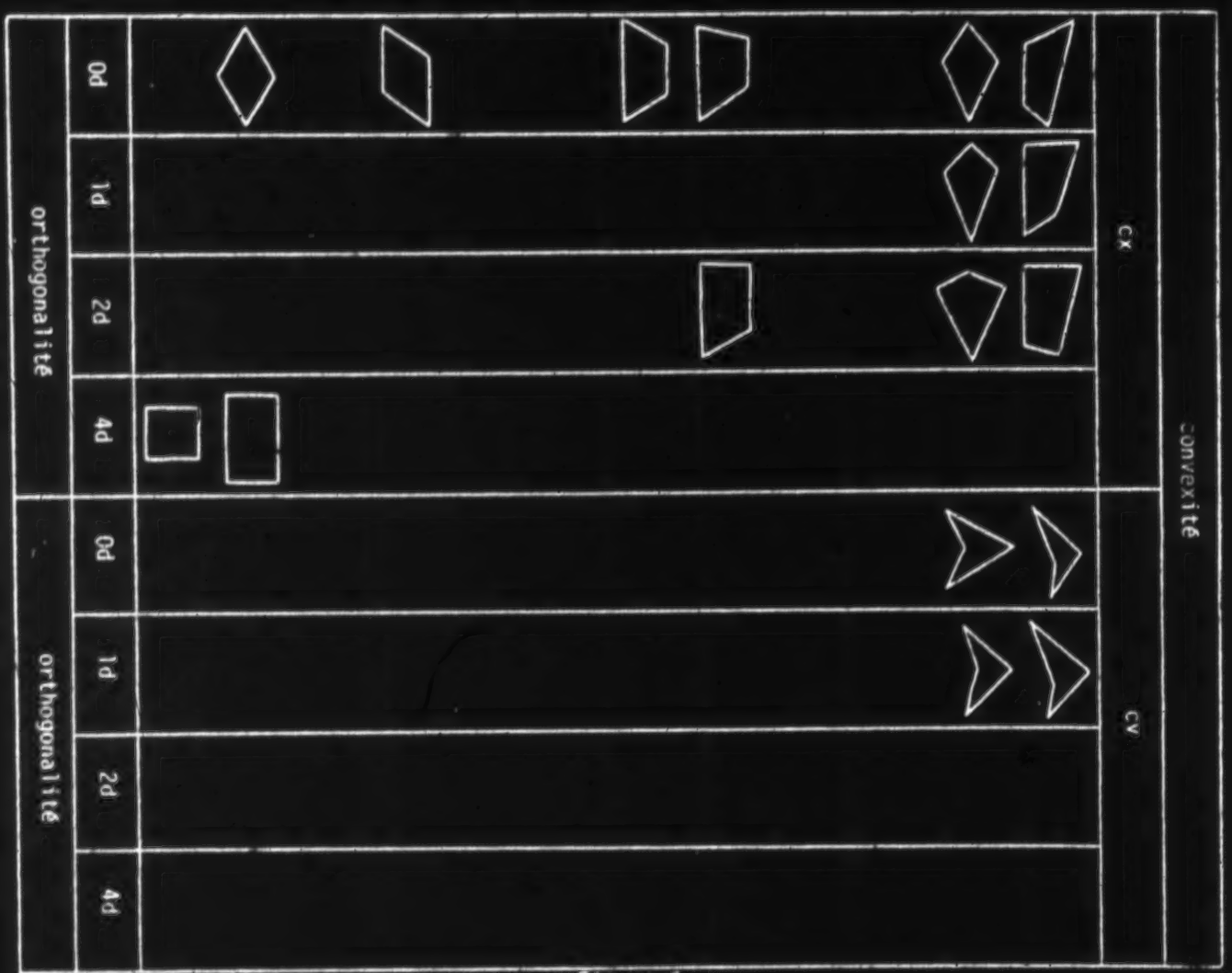


Figure 6

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E1 et E3.

$Z_{\{1,3\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 6
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 2

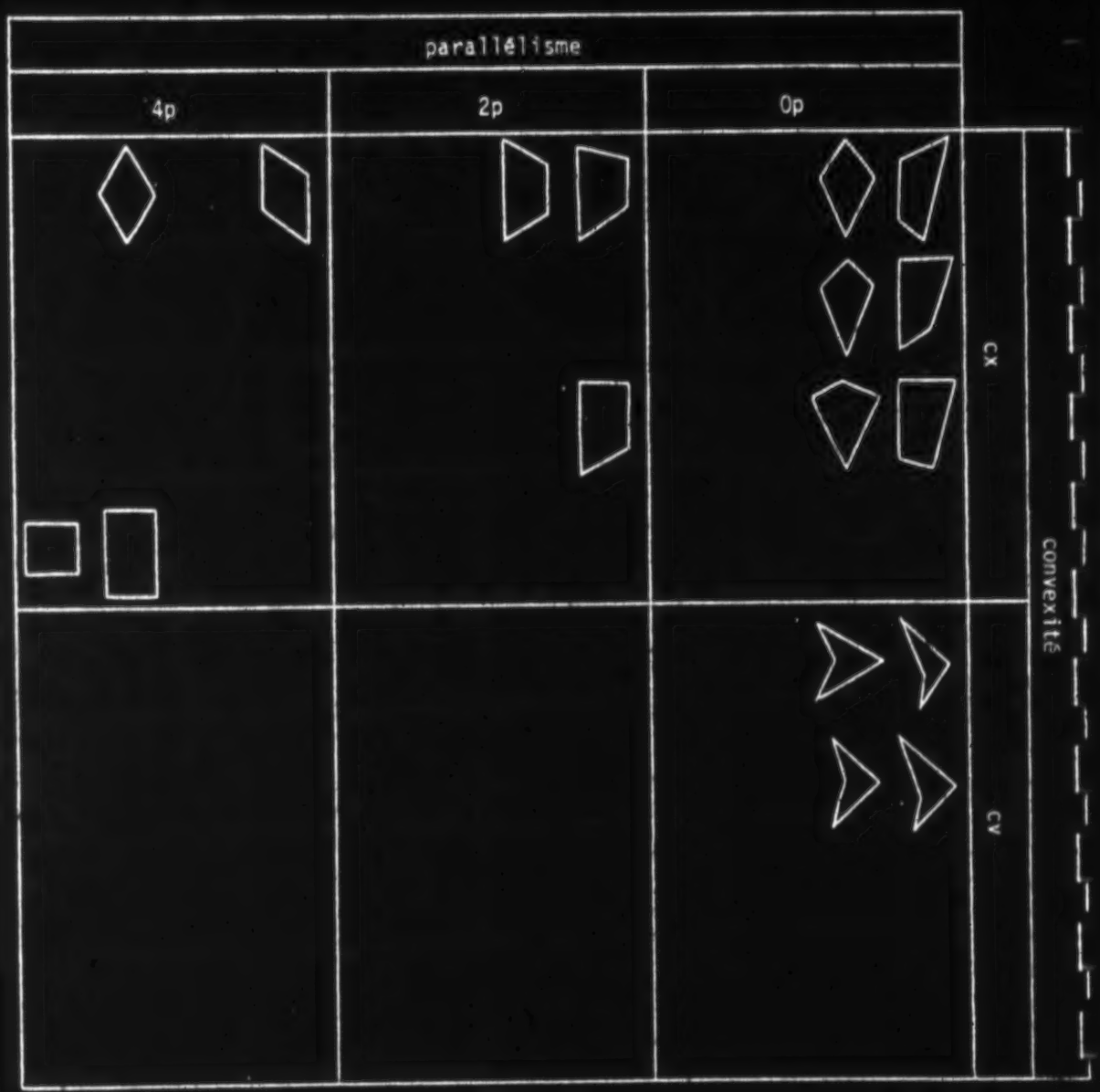


Figure 7

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E1 et E4.

$Z_{\{1,4\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 8
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 2

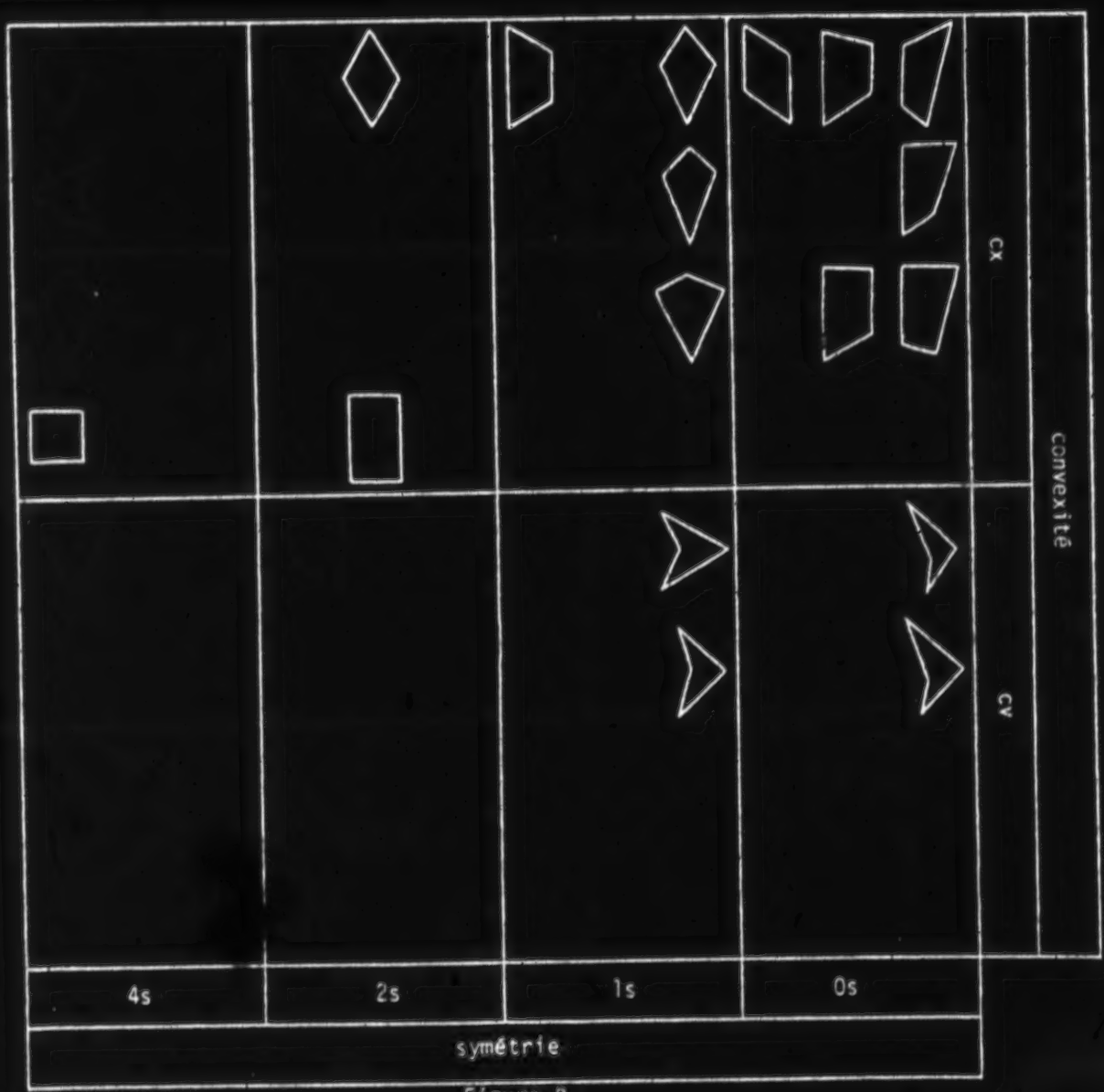


Figure 8

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E2 et E3.

$Z_{\{2,3\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 12
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 5

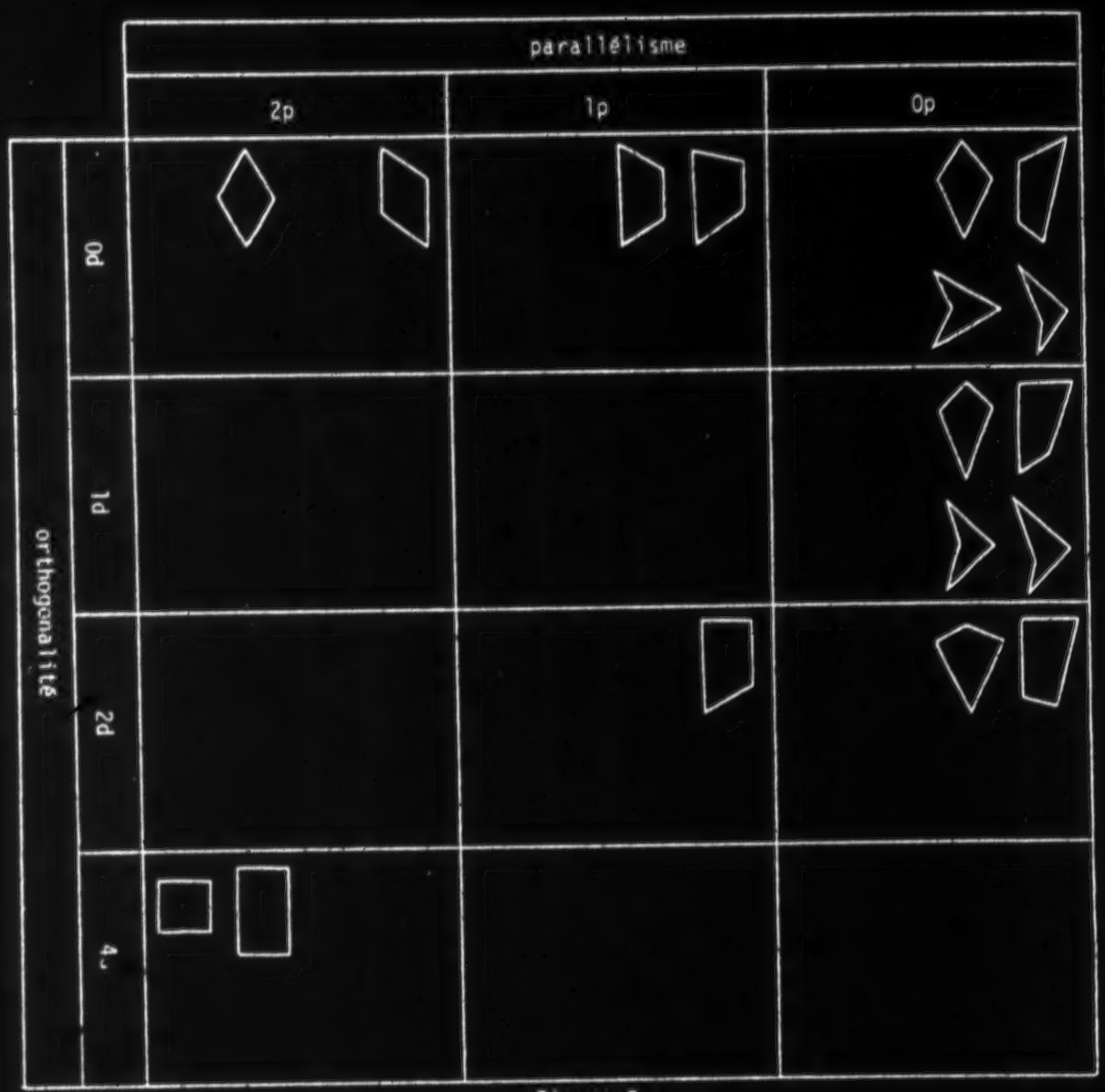


Figure 9

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E2 et E4.

$$Z_{\{2,4\}}$$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 16
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 7

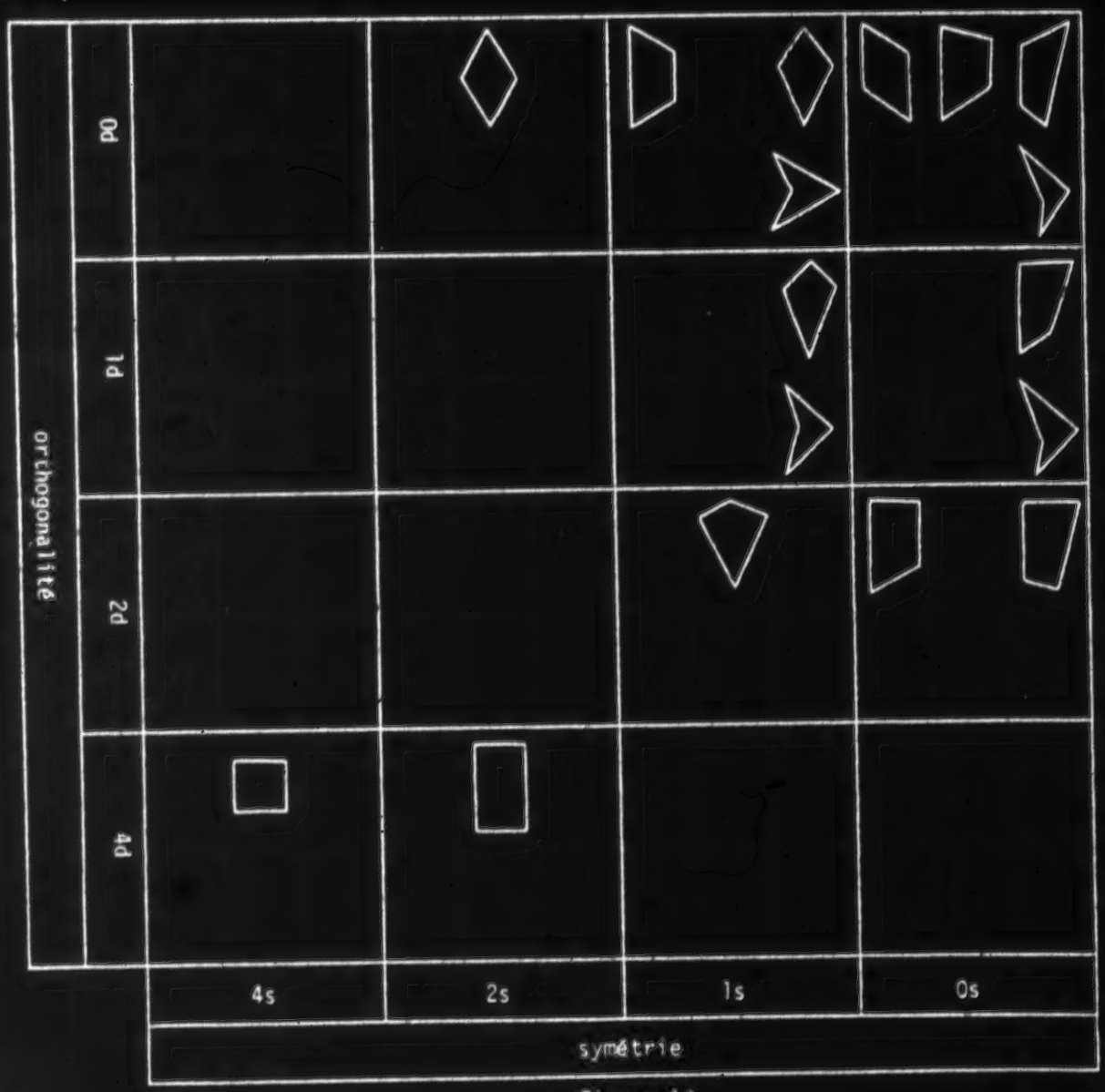


Figure 10

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E3 et E4.

$Z_{\{3,4\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 12
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 5

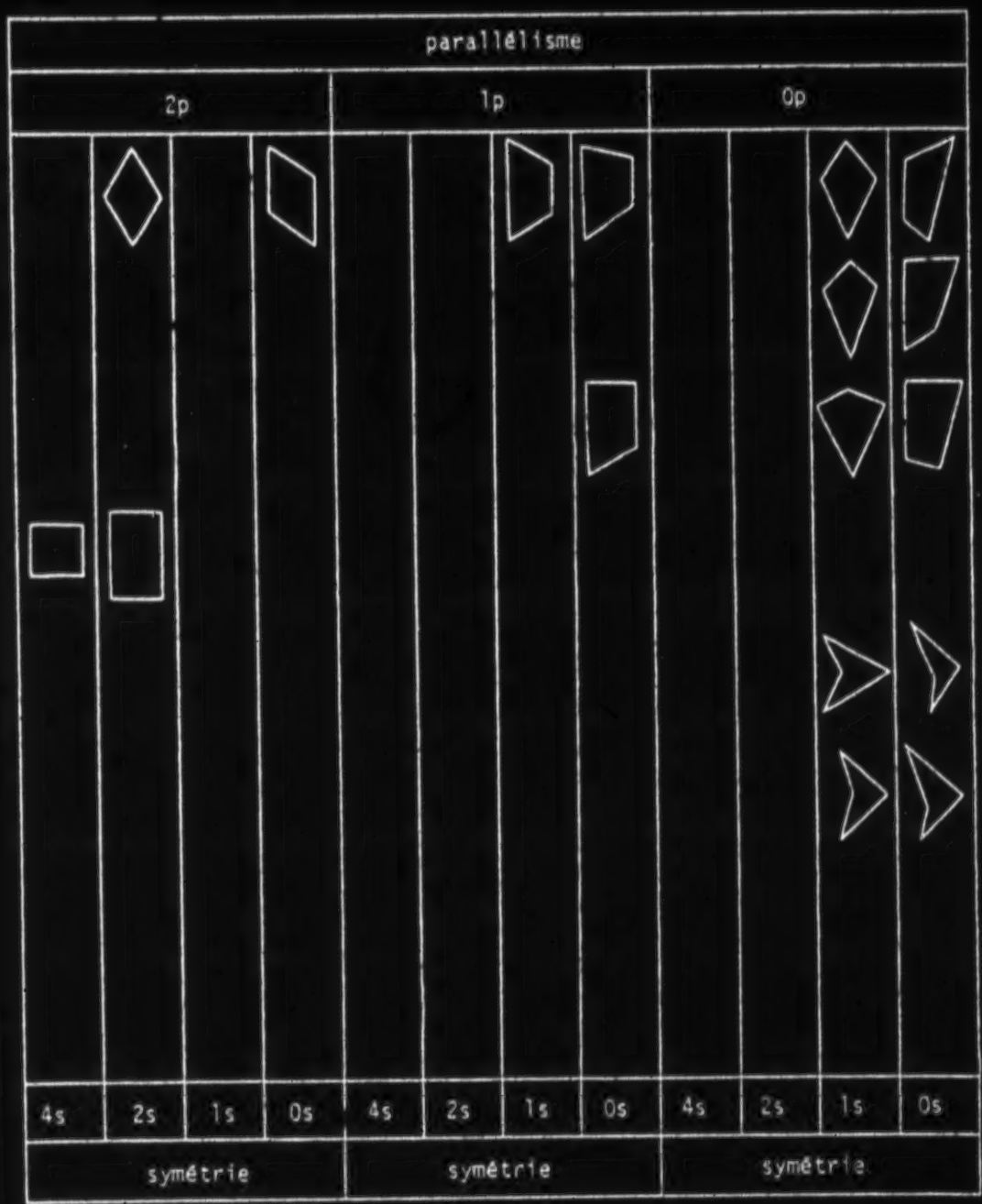


Figure 11

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPPIETES DE E1, E2 et E3.

$Z_{\{1,2,3\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 24
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 15

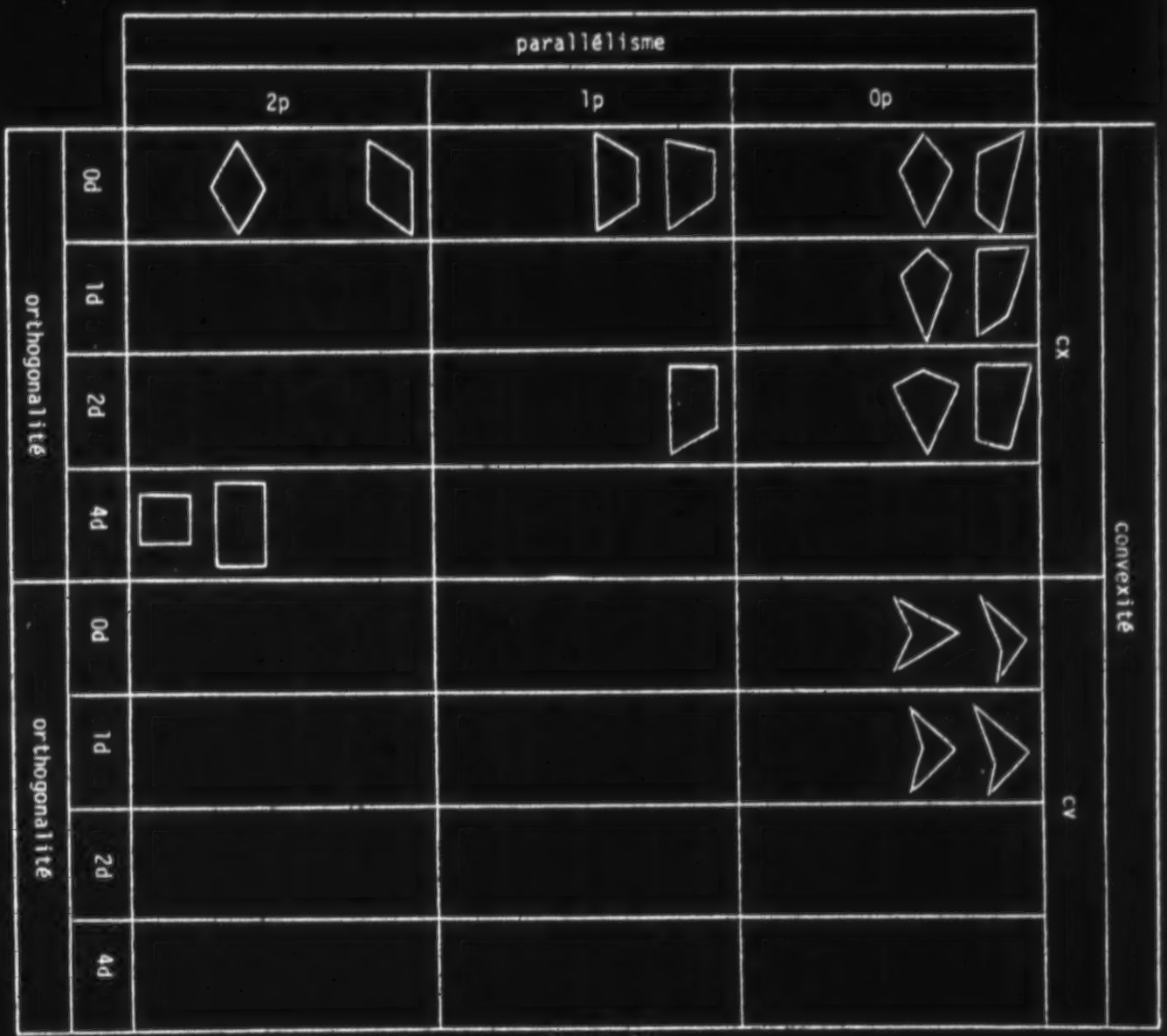


Figure 12

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E1, E2, E4.

$$Z_{\{1,2,4\}}$$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 32
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 19

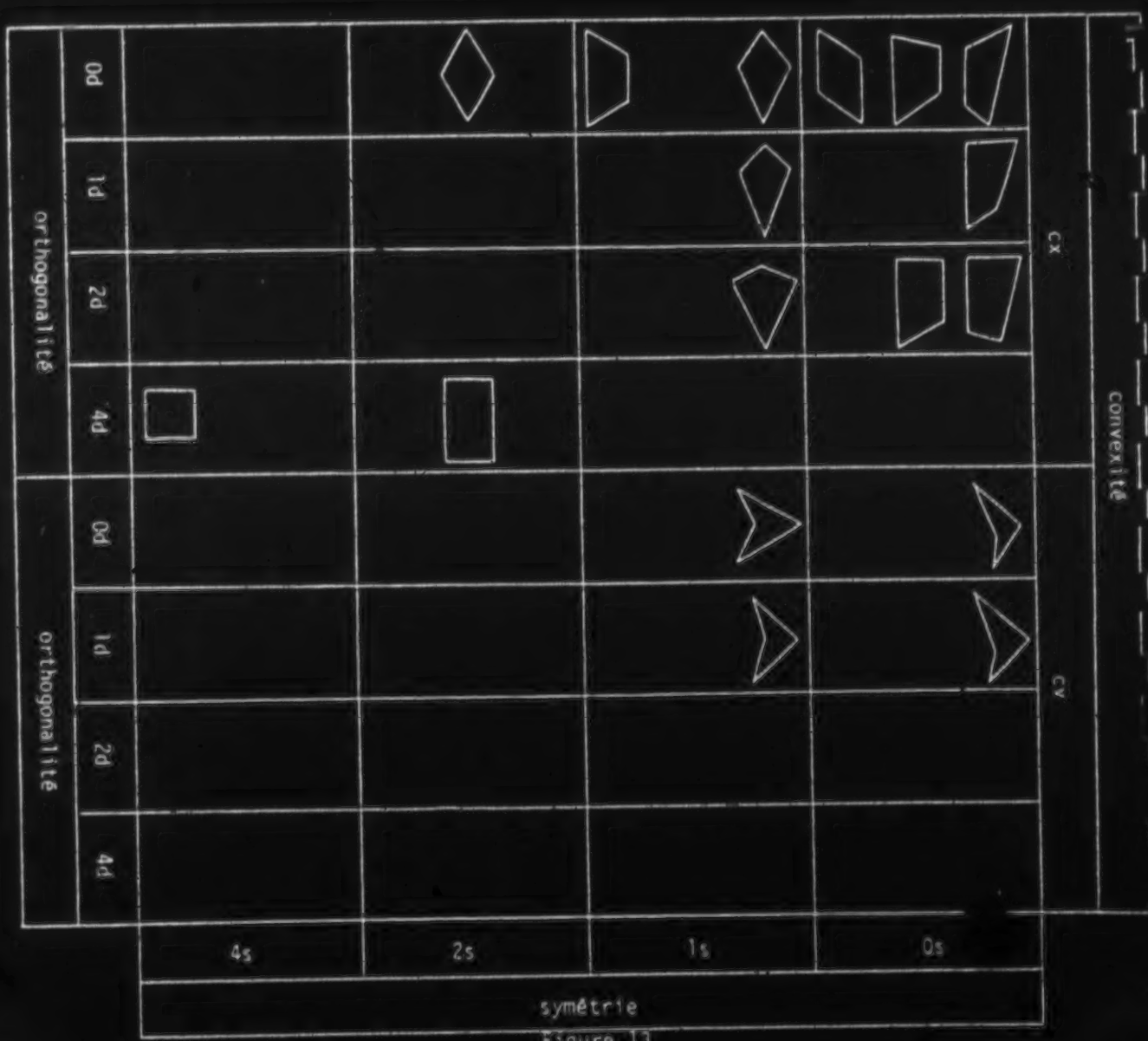


Figure 13

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E1, E3 et E4.

$Z_{\{1,3,4\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 24
NOMBRE DE CLASSES VIDES 15

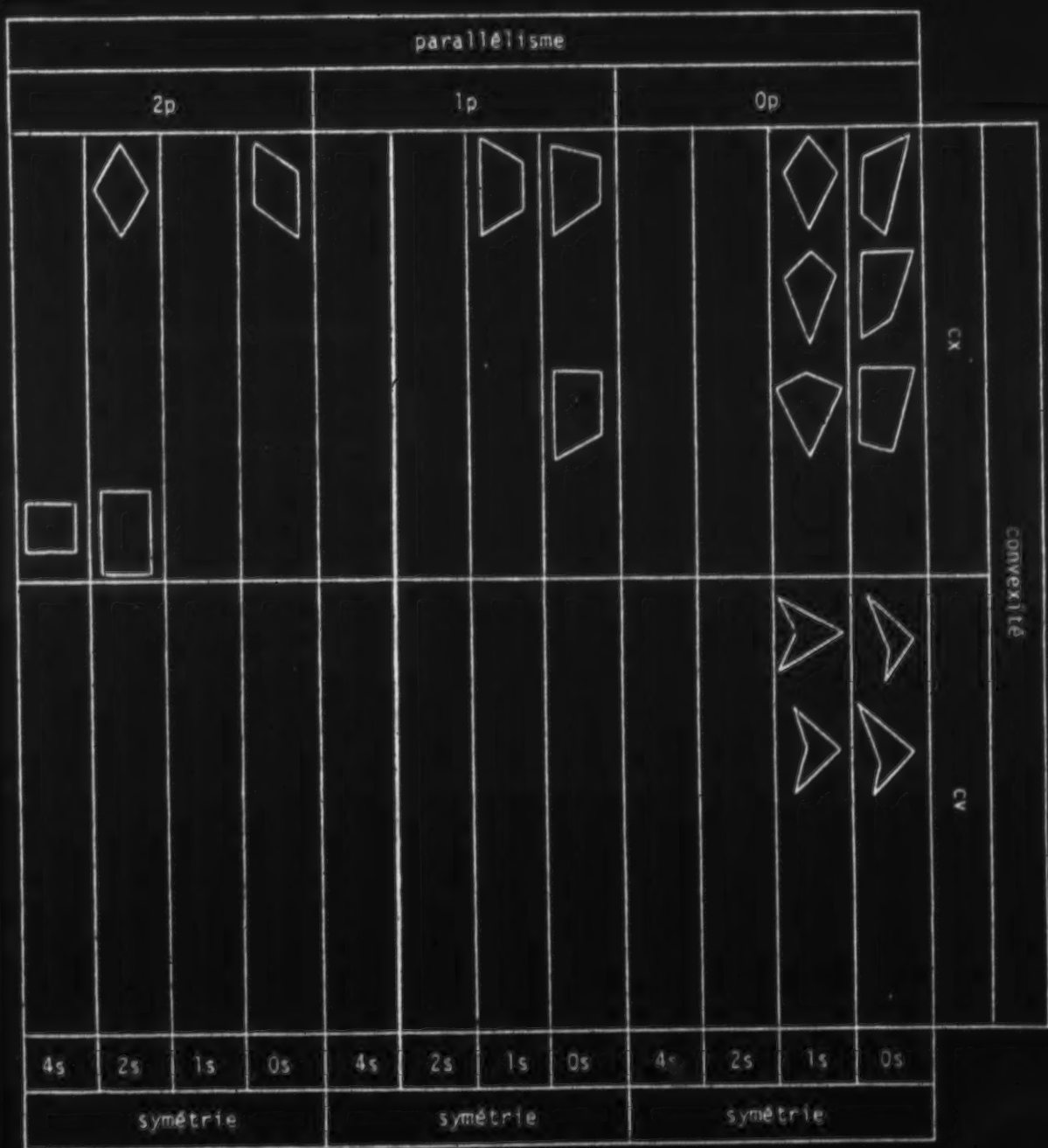


Figure 14

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E2, E3 et E4.

$$Z_{\{2,3,4\}}$$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 48
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 35

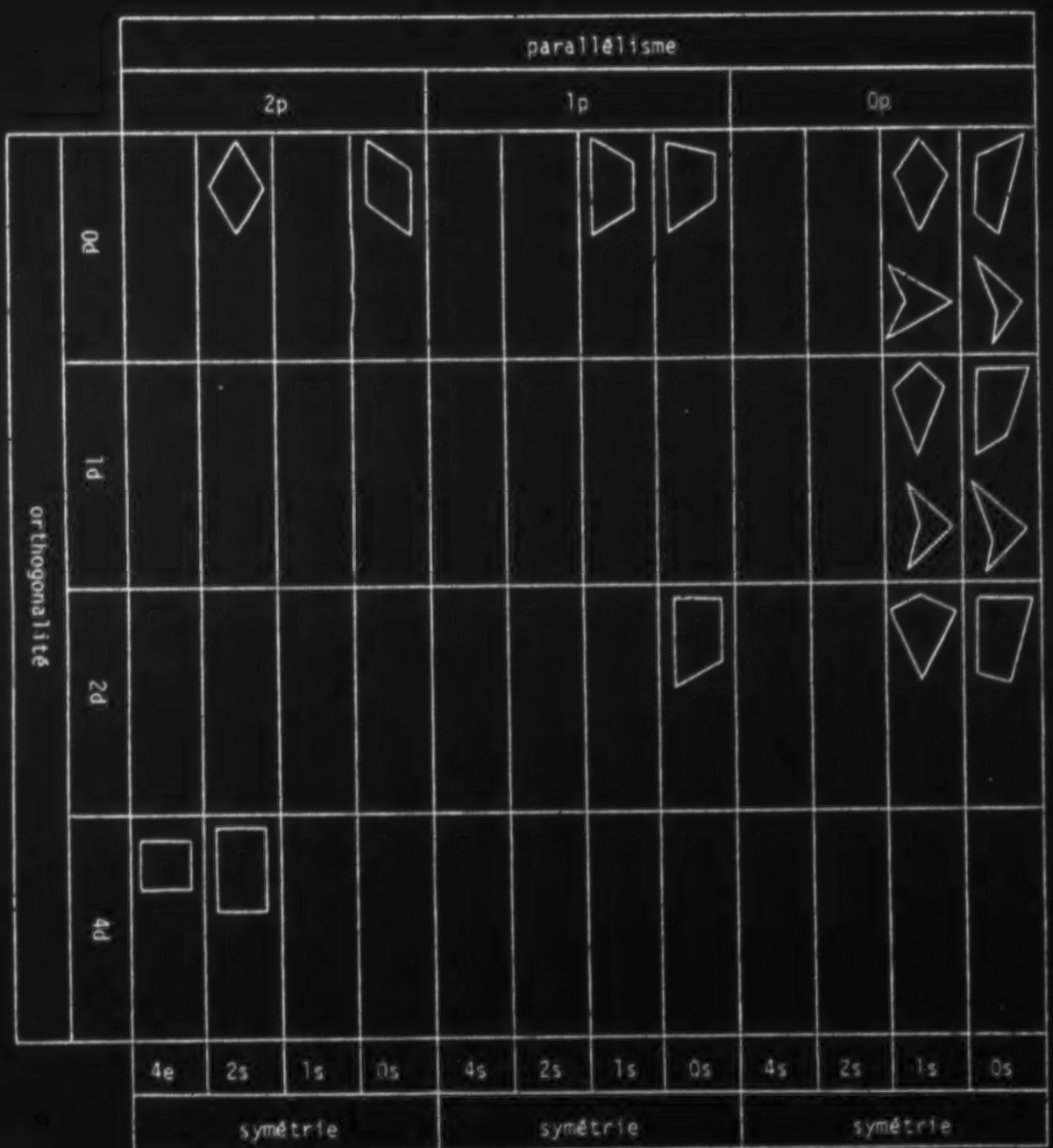


Figure 15

DIAGRAMME REPRESENTANT LA PARTITION DE Q
SELON LES PROPRIETES DE E1, E2, E3 et E4.

$Z_{\{1,2;3,4\}}$

NOMBRE TOTAL DE CLASSES: 96
NOMBRE DE CLASSES VIDES: 79

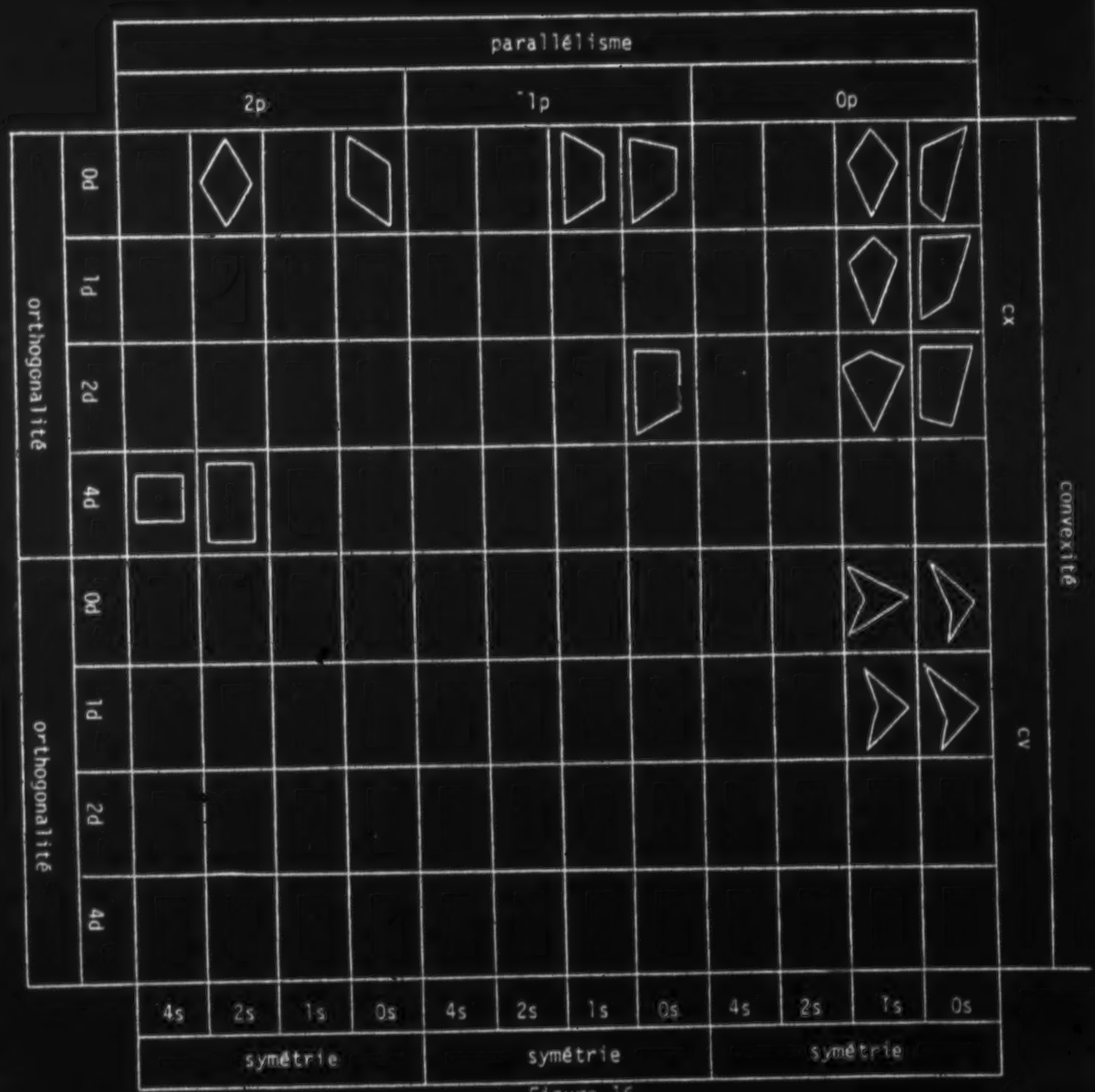


Figure 16

1,3 Formation d'un groupement logique de superposition complète de partitions dans M.

Une partition de Q qui est induite par la conjonction de relations d'équivalence données par E_1 et E_2, par exemple, est considérée comme une superposition des partitions $Z_{\langle 1 \rangle}$ et $Z_{\langle 2 \rangle}$.

Cette réalité est concrétisée et visualisée au moyen des diagrammes de Carroll présentés sur les acétates superposables en annexe 1, lesquels acétates sont reproduits sur les figures 17 a),b),c),d). (pages 151-152-153-154)

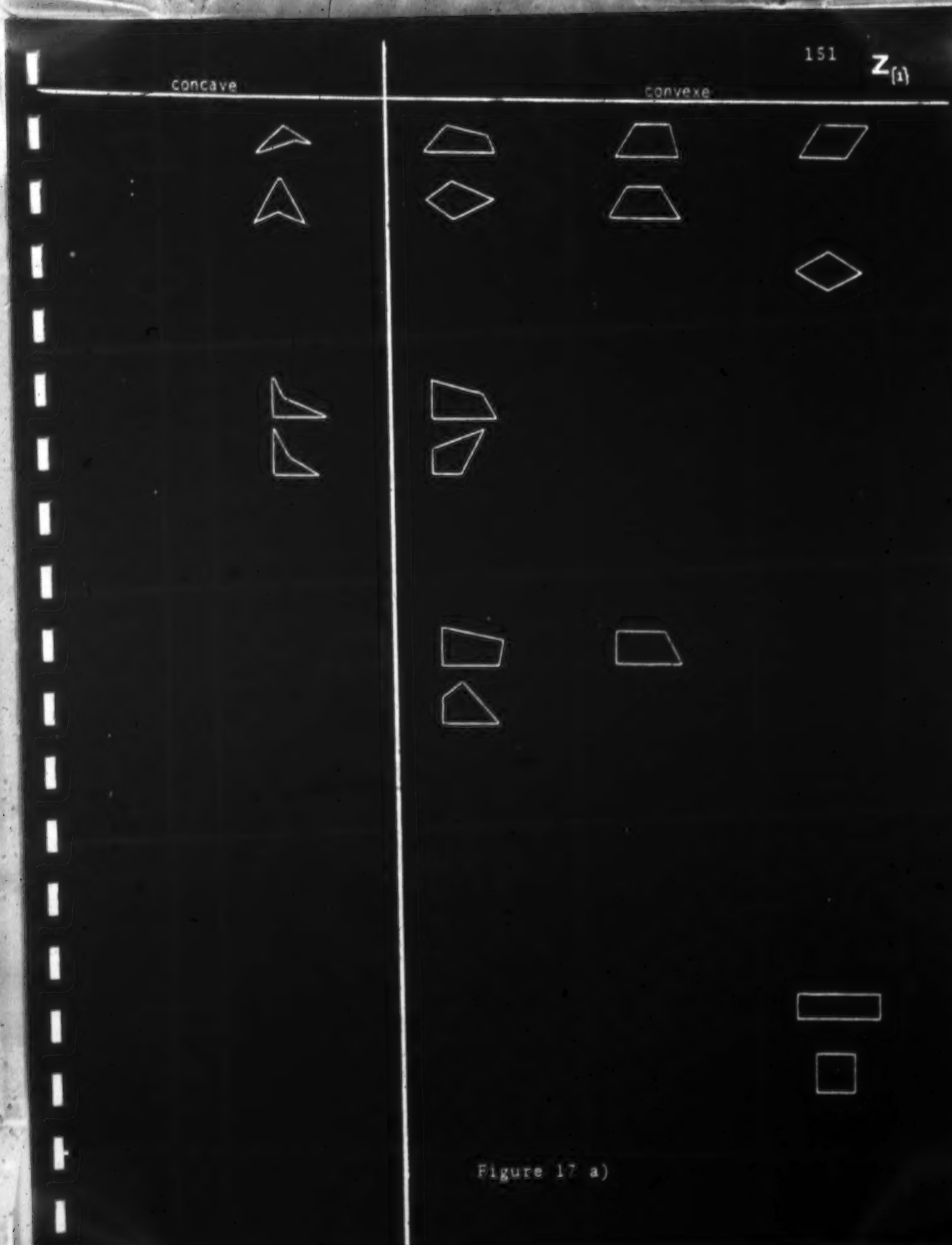


Figure 17 a)

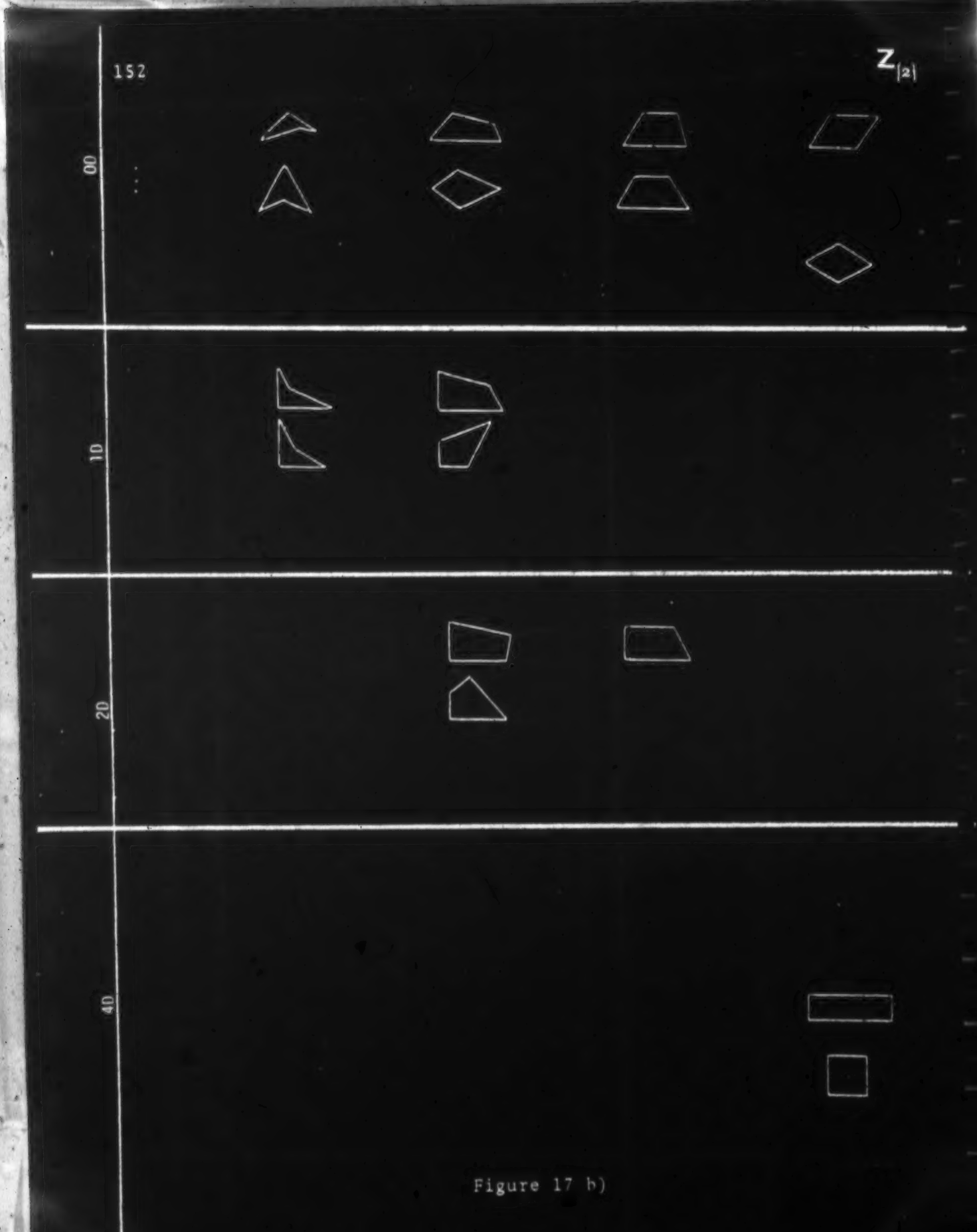


Figure 17 b)

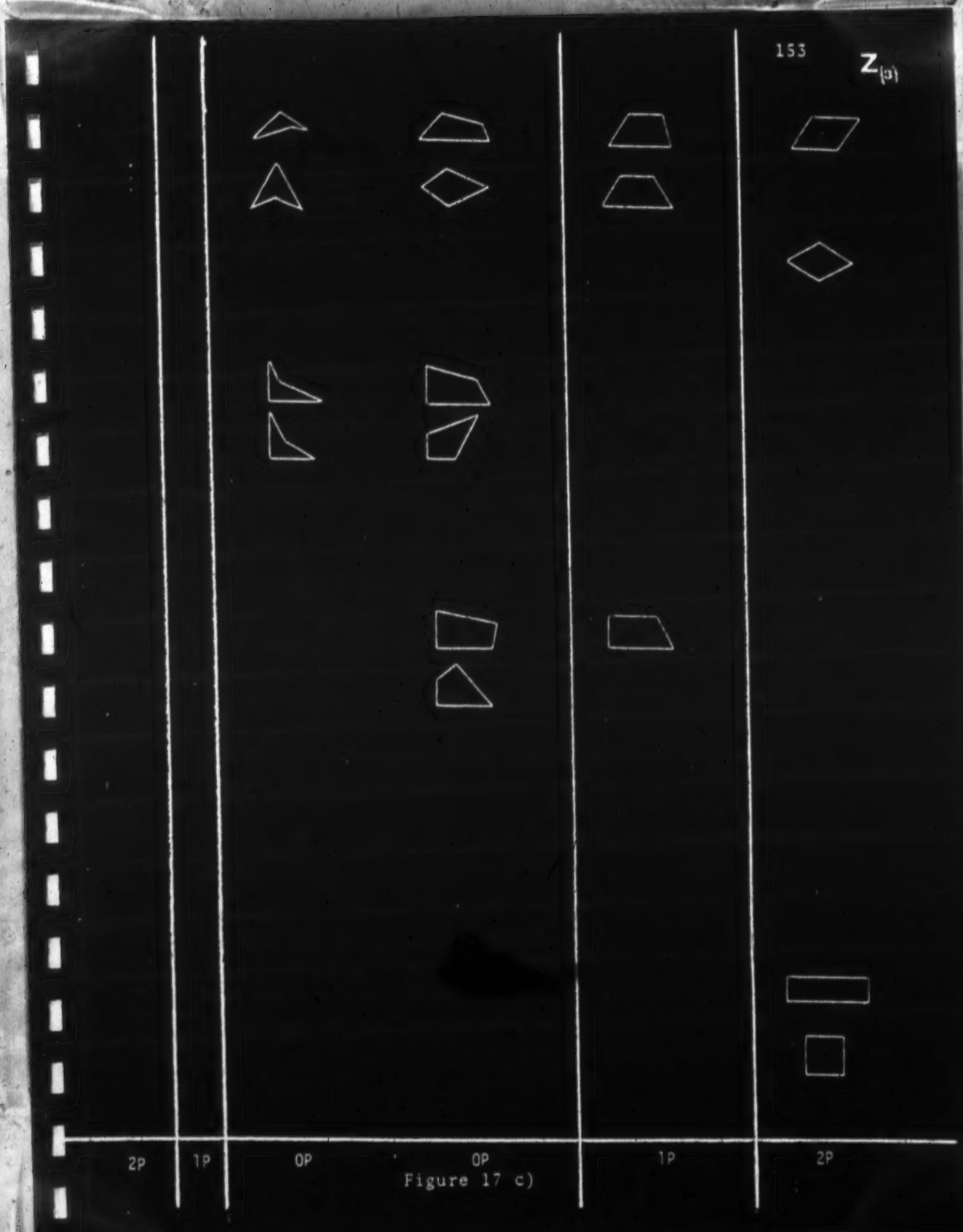


Figure 17 c)

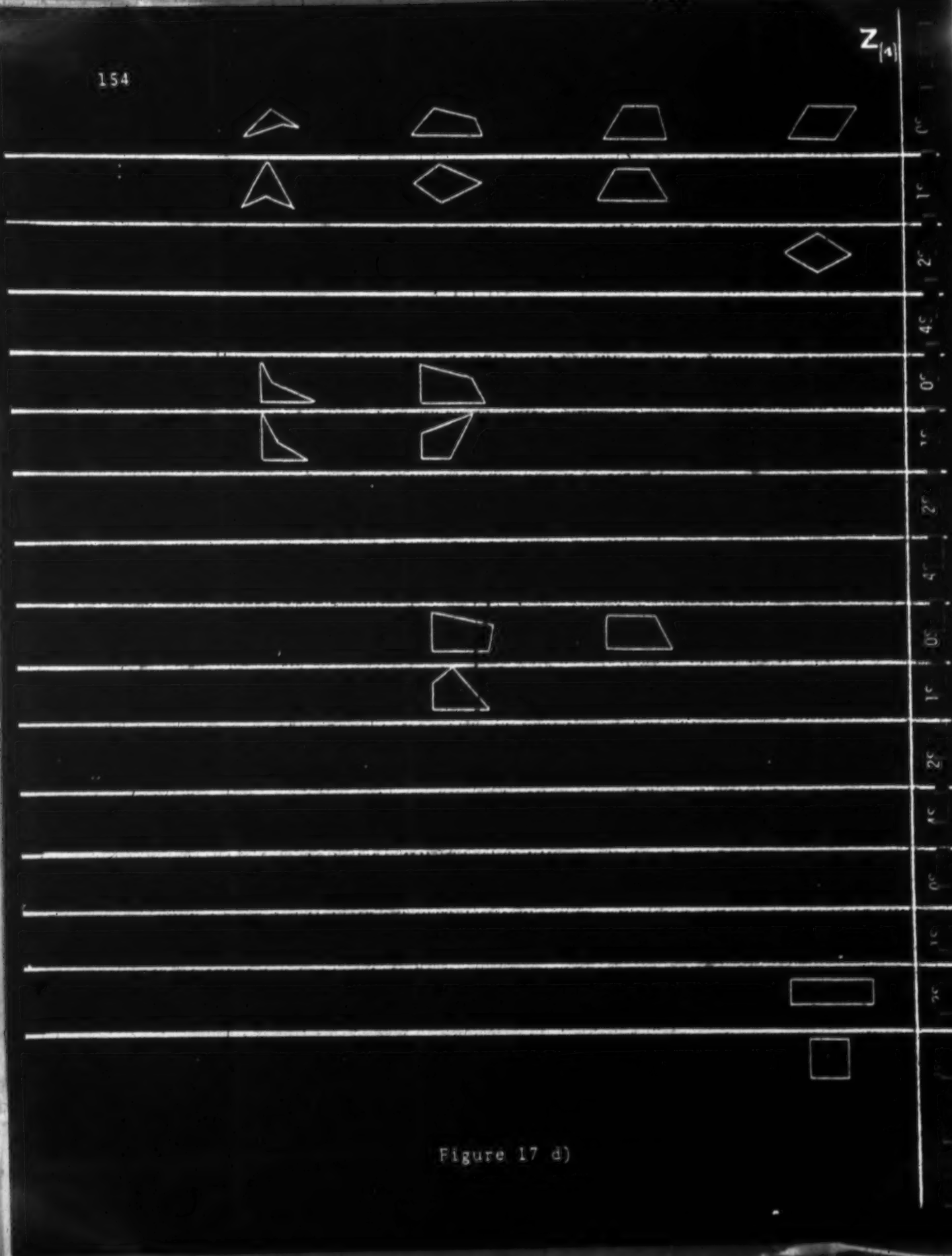


Figure 17 d)

Plus généralement:

$$E = \langle E_1, E_2, E_3, E_4 \rangle$$

Soit S un sous-ensemble de $\langle 1,2,3,4 \rangle$.

Nous désignons par Z_S la partition de Q qui est induite par la conjonction des relations de l'équivalence données par S. Z_S est considérée comme la superposition des partitions $Z_{\langle j \rangle}$, $j \in S$.
Nous supposons $Z_S \neq Z_T$ si $S \neq T$; $S, T \subseteq \langle 1,2,3,4 \rangle$

On a alors:

$$M = \langle Z_S \ / \ S \subseteq \langle 1,2,3,4 \rangle \rangle$$

Sur M définissons une relation $\triangle$ comme suit:

$$\triangle = \langle (Z_S, Z_T) / \ S \subseteq T \subseteq \langle 1,2,3,4 \rangle , \text{ card. } (T \setminus S) = 1 \rangle$$

La relation $\trianglelefteq$ engendrée en tant que fermeture réflexo-transitive de $\triangle$ se lit:

$Z_S \trianglelefteq Z_T \Longleftrightarrow Z_T$, discrimine plus finement que Z_S ou égal à Z_S.

$(M, \trianglelefteq)$ est un ensemble ordonné.

Pour toute paire d'éléments de M on définit une borne supérieure et une borne inférieure:

$$Z_S \sqcup Z_T = Z_{S \cup T}$$

$$Z_S \sqcap Z_T = Z_{S \cap T}$$

$(M, \trianglelefteq)$ est un treillis

$(M, \triangle)$ est un groupement de treillis: on l'appelle groupement de superposition complète.

La figure 18 ainsi que l'annexe 2 représentent le graphe de la superposition complète de partitions dans l'ensemble des partitions M, lesquelles sont formées dans Q au moyen des ensembles d'attributs E_1, E_2, E_3, E_4.

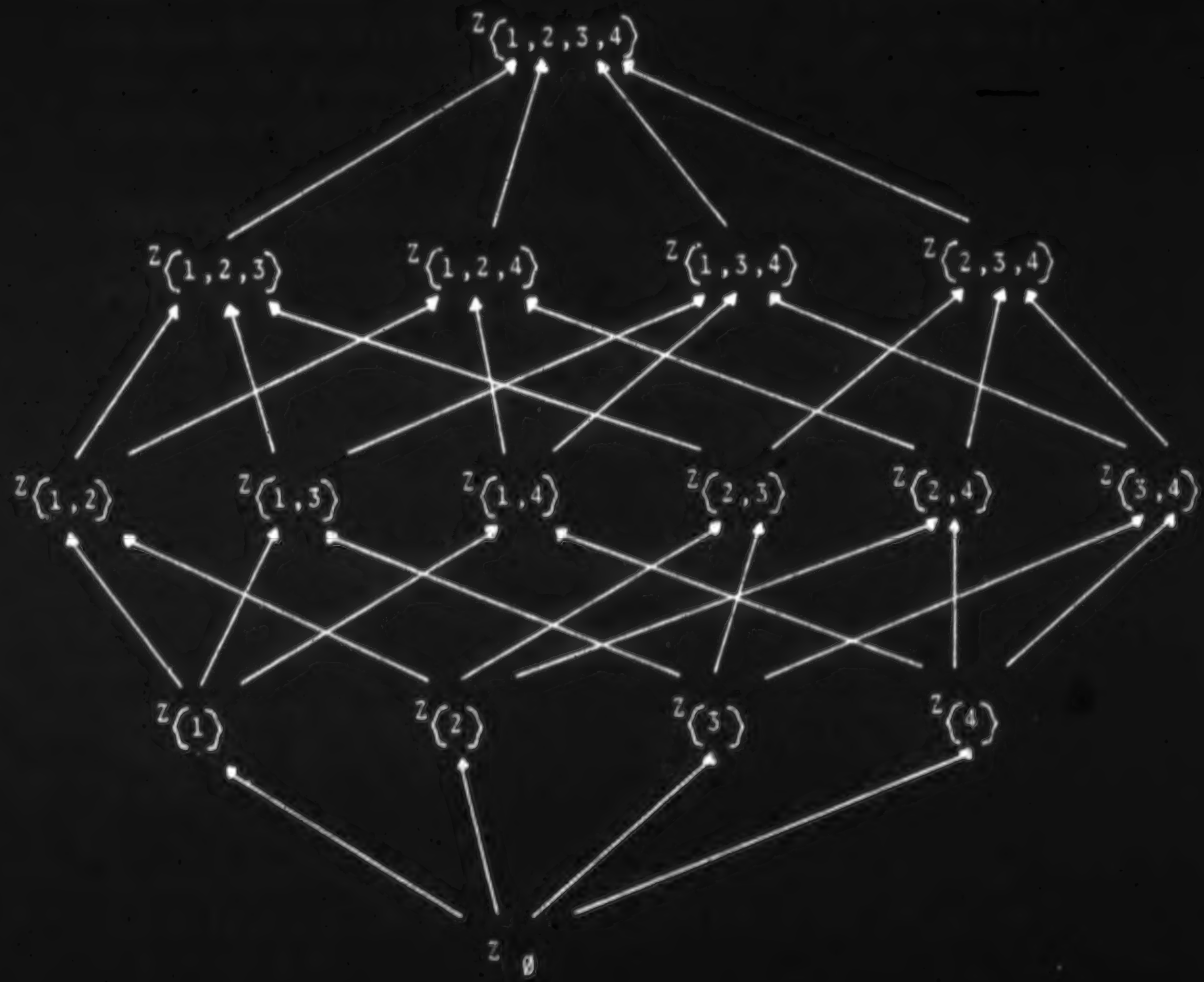

$Z_{\{1,2,3,4\}}$
$Z_{\{1,2,3\}}$
$Z_{\{1,2,4\}}$
$Z_{\{1,3,4\}}$
$Z_{\{2,3,4\}}$
$Z_{\{1,2\}}$
$Z_{\{1,3\}}$
$Z_{\{1,4\}}$
$Z_{\{2,3\}}$
$Z_{\{2,4\}}$
$Z_{\{3,4\}}$
$Z_{\{1\}}$
$Z_{\{2\}}$
$Z_{\{3\}}$
$Z_{\{4\}}$
$Z_{\emptyset}$

Figure 18

Au chapitre 1, nous avons conçu et décrit, dans Q, le groupement logique de superposition complète de partitions à la base de E_1, E_2, E_3 et E_4.

2 Groupement logique des classes des partitions de M.

Dans le deuxième chapitre, nous décrirons le groupement logique des classes d'une partition et nous représenterons par un graphe chacun des groupements logiques de classes des partitions de M.

2,1 Groupement logique des classes d'une partition de M.

Soit:

$M = \{Z_{\emptyset}, Z_{(1)}, Z_{(2)} \cdots Z_{(1,2,3,4)}\}$ l'ensemble des partitions obtenues par la superposition complète de partitions à la base de E_1, E_2, E_3 et E_4.

Considérons uniquement les classes d'une partition soit: $Z_{(2,3)}$

Toute classe de $Z_{(2,3)}$ peut être symbolisée par un quadruplet $[a,b,c,d]$ où $a \in E_1$, $b \in E_2$, $c \in E_3$ et $d \in E_4$.

Si nous définissons une relation $\trianglelefteq$ dans $Z_{(2,3)}$ comme suit: $[a,b,c,d] \trianglelefteq [a',b',c',d] \iff a \leq a'$ et $b \leq b'$ et $c \leq c'$ et $d \leq d'$

et où $\leq$ est la relation "plus petit ou égal" dans un ensemble de nombres naturels.

Aussi $\trianglelefteq$ peut être considéré comme un ordre de perfection.

La relation Δ est alors la relation de couverture dérivée de $\trianglelefteq$.

Dans $Z_{(2,3)}$ nous définissons sup et inf comme suit:

$$[a,b,c,d] \sqcup [a',b',c',d'] = (w,x,y,z) \text{ tel que:}$$
$$w = \max(a,a')$$
$$x = \max(b,b')$$
$$y = \max(c,c')$$
$$z = \max(d,d') \text{ sont minimales.}$$

$$(a,b,c,d) \sqcap (a',b',c',d') = (w,x,y,z) \text{ tel que:}$$
$$\min(a,a') = w$$
$$\min(b,b') = x$$
$$\min(c,c') = y$$
$$\min(d,d') = z \text{ sont minimales.}$$

Ainsi $(Z_{(2,3)}, \trianglelefteq)$ est un treillis et $(Z_{(2,3)}, \Delta)$ est un groupement de treillis et peut être représenté par le graphe suivant:

De la même façon, nous pourrions appliquer la relation à toutes les partitions de M.

Remarque:

Dans le groupement des classes de la partition $Z_{\langle 2,3 \rangle}$, nous avons représenté chacune des classes par son élément minimal.

Exemple:

La classe $[\underline{0}1\underline{0}0] = \langle 0\underline{1}0\underline{0}, 0\underline{1}0\underline{1}, 1\underline{1}0\underline{0}, 1\underline{1}0\underline{1} \rangle$ est représenté par son élément minimal soit le quadrilatère 0100, où $0 \in E_1$, $1 \in E_2$, $0 \in E_3$ et $0 \in E_4$.

Les éléments de la classe $[\underline{0}1\underline{0}0]$ ont le même nombre d'angles droits (soit 1) et le même nombre de paires de côtés parallèles (soit 0).

Pour nous permettre de constater que la classe $[\underline{0}100]$ fait partie de la partition $Z_{\langle 2,3 \rangle}$, nous soulignons le 2^e et le 3^e chiffre de la classe. ($[\underline{0}1\underline{0}0]$)

2.2 Représentation des groupements logiques des classes des partitions de M.

Les seize (16) graphes suivants (figures 20 à 35 inclusivement) représentent les groupements logiques des classes des partitions de . Afin de rendre ces graphes plus visuels, nous avons dessiné tous les éléments de chacune des classes d'une partition.

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $\Sigma_{\emptyset}$

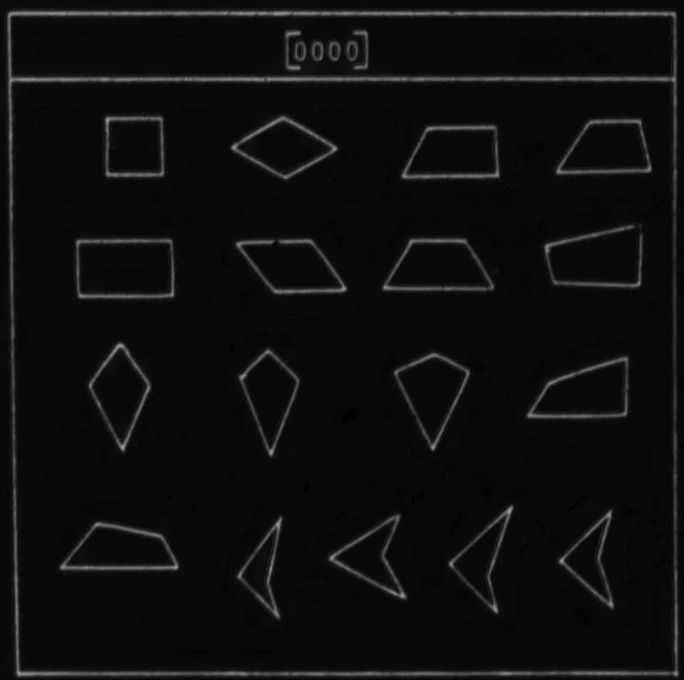


Figure 20

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $\Pi_{(1)}$

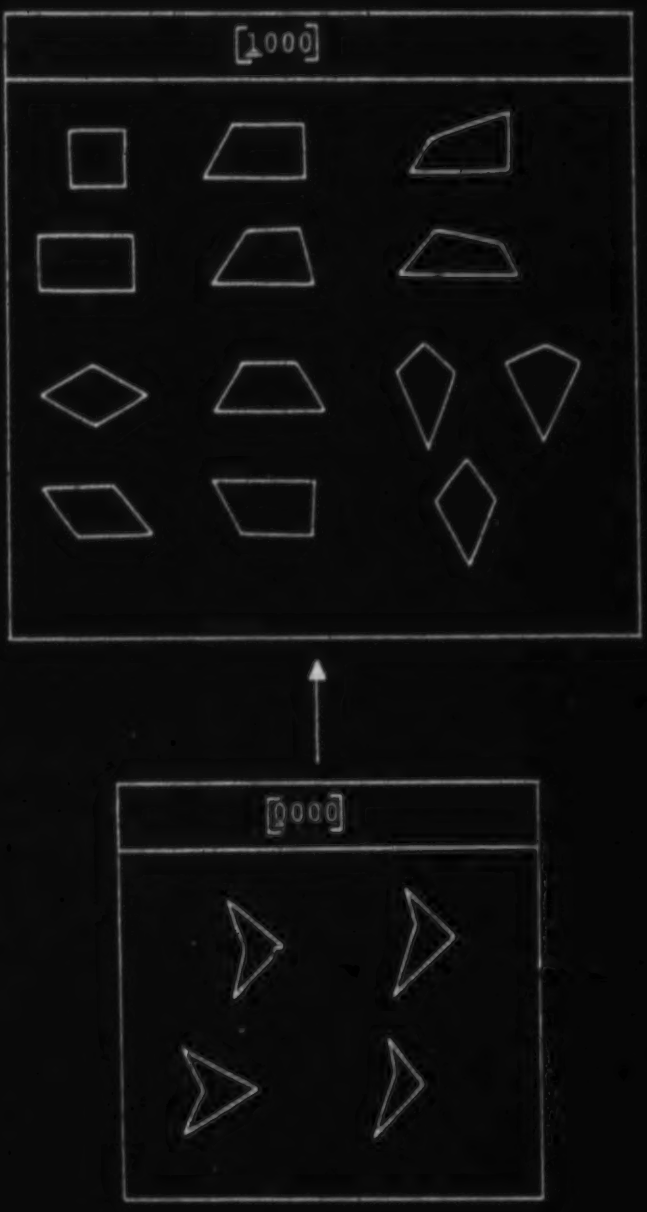


Figure 21

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $\Sigma_{(2)}$

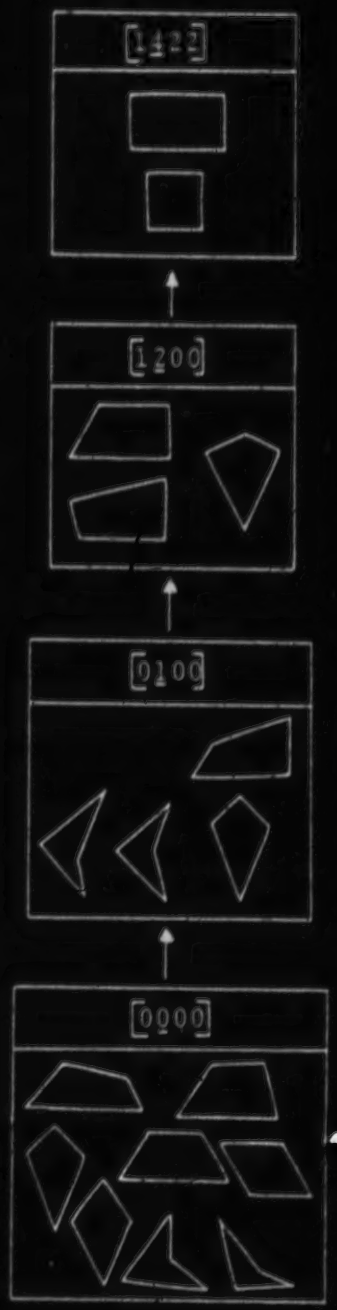


Figure 22

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{(3)}$

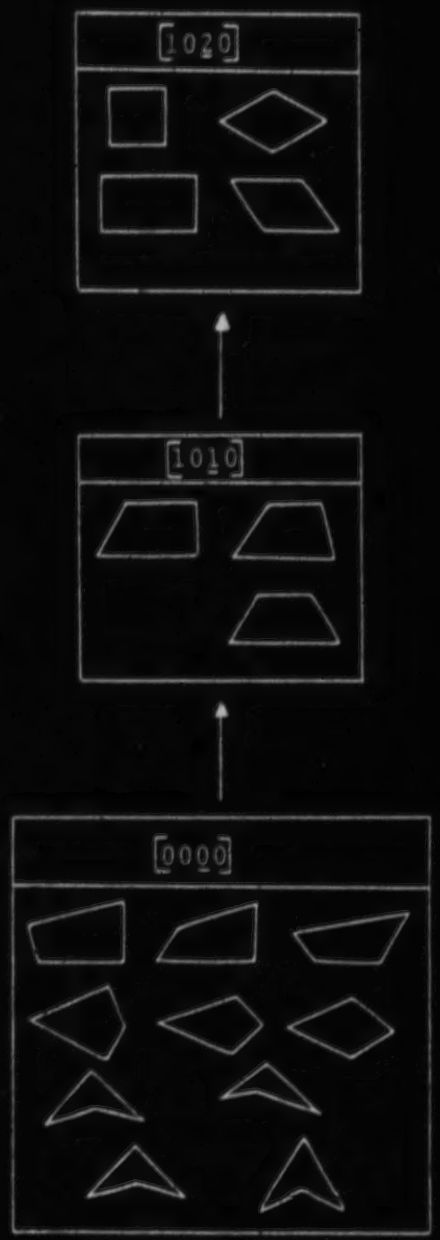


Figure 23

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{(4)}$

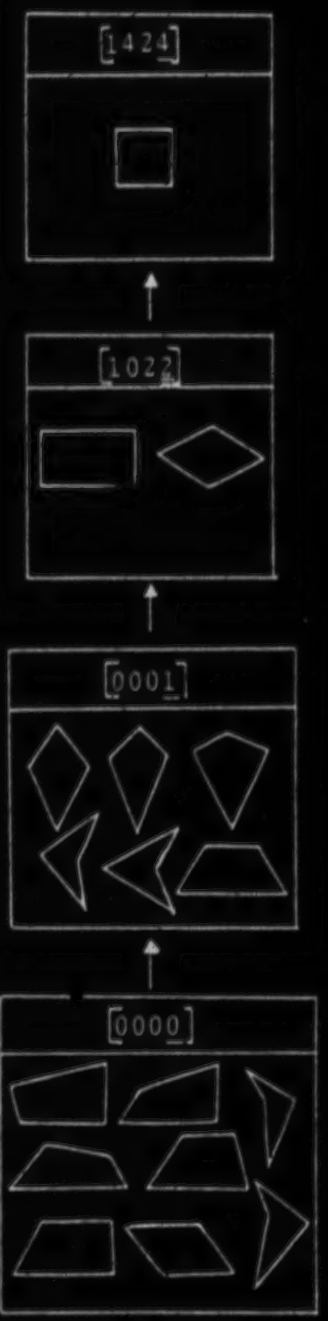


Figure 24

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{(1,2)}$

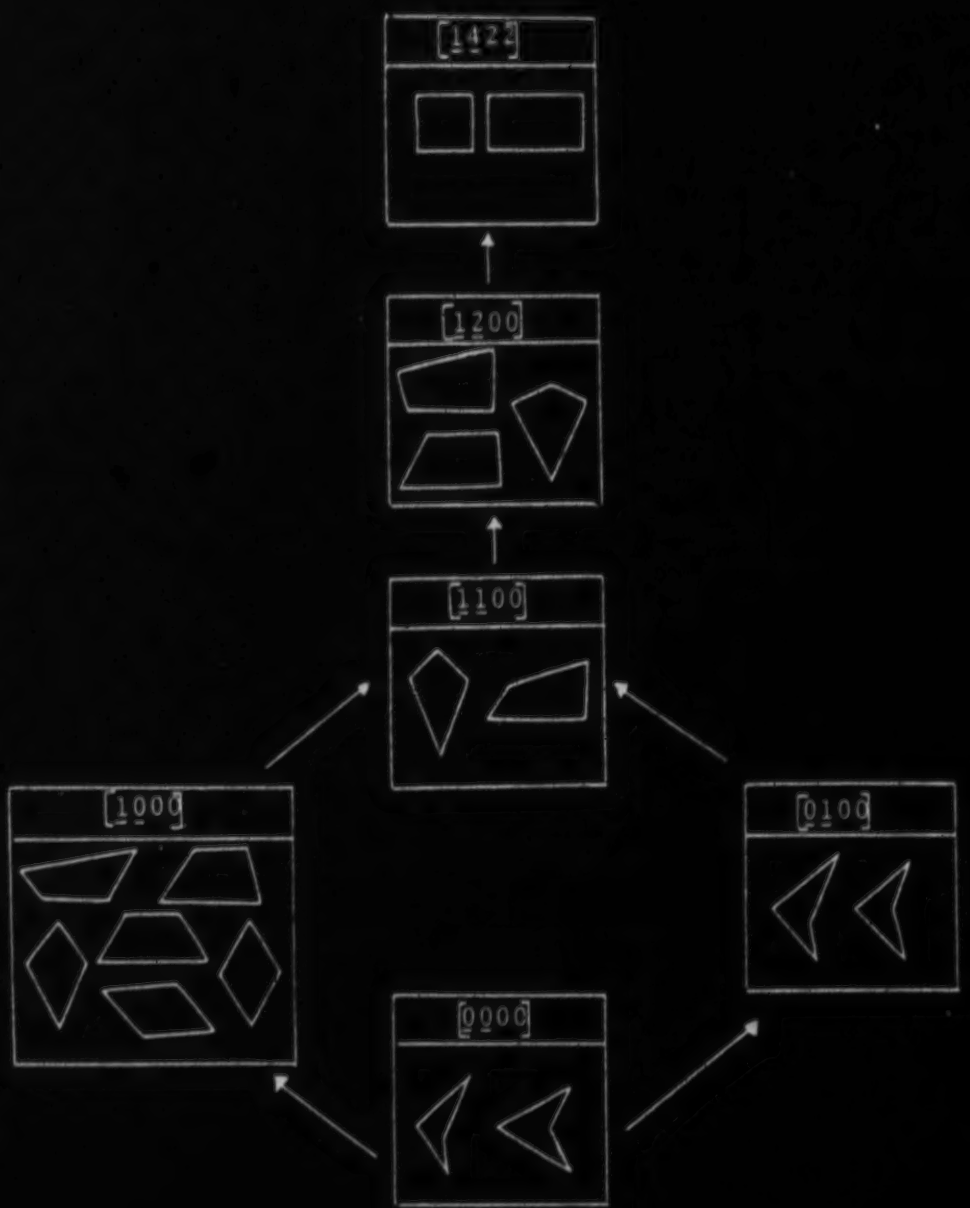


Figure 25

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $\Sigma_{(1,5)}$

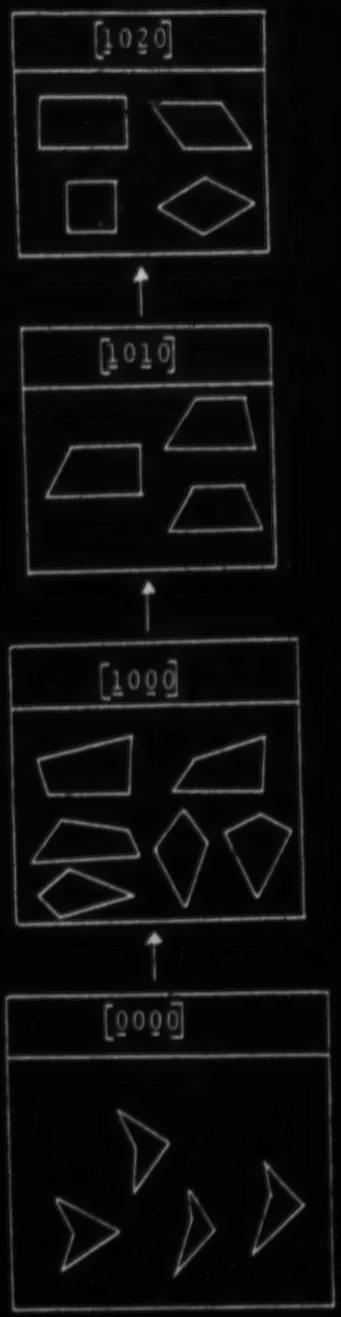


Figure 26

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{(1,4)}$

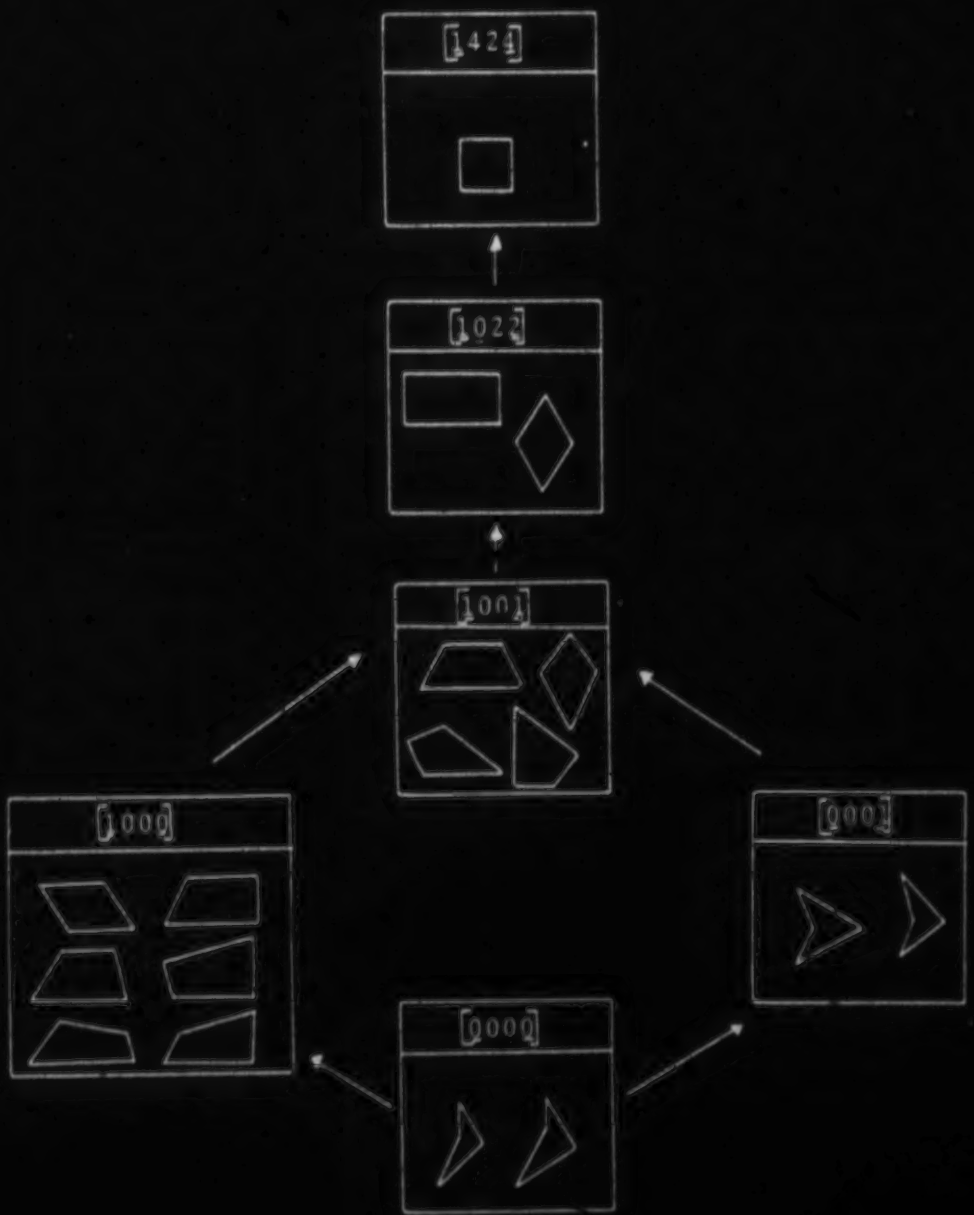


Figure 27

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{(2,3)}$

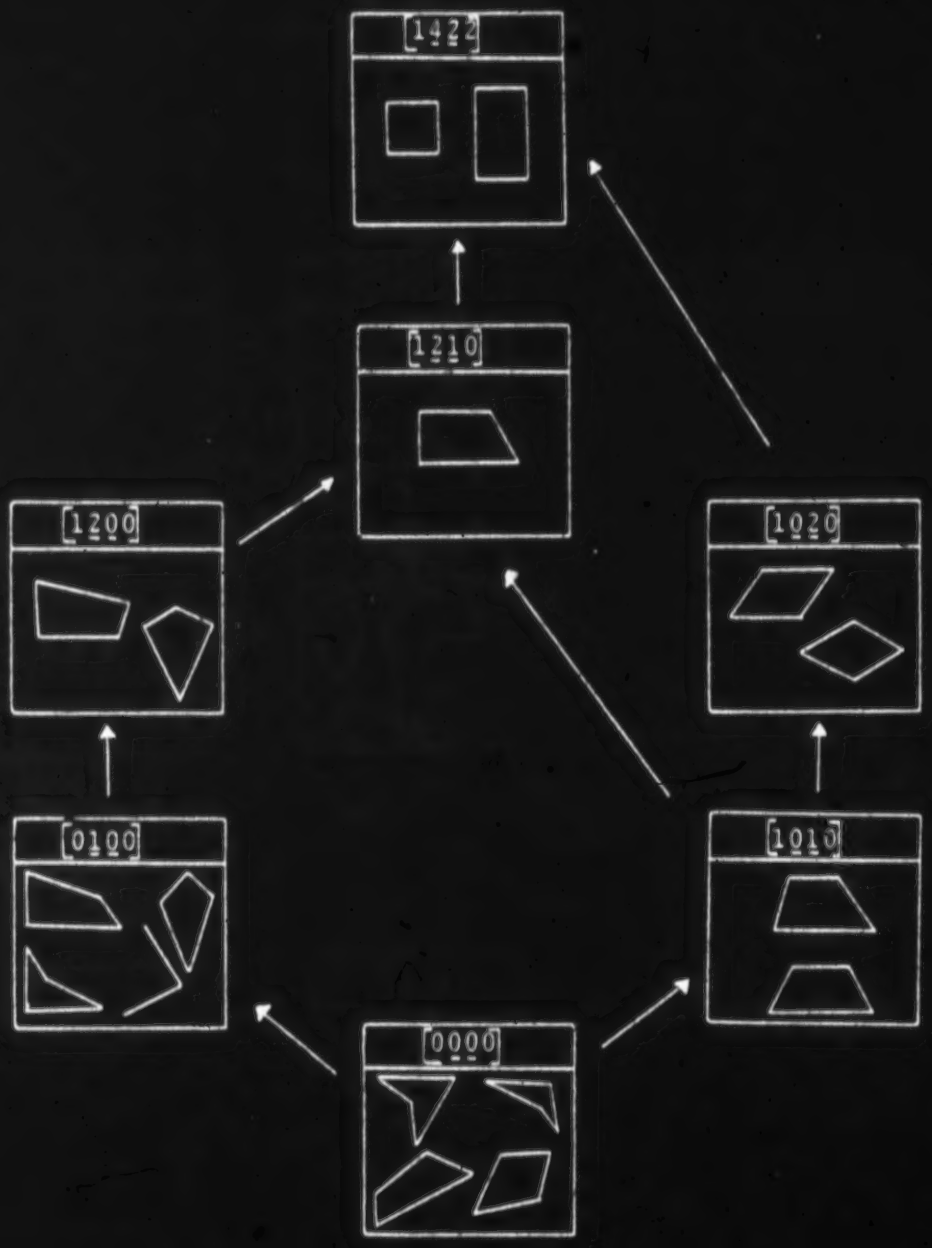


Figure 28

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{(2,4)}$

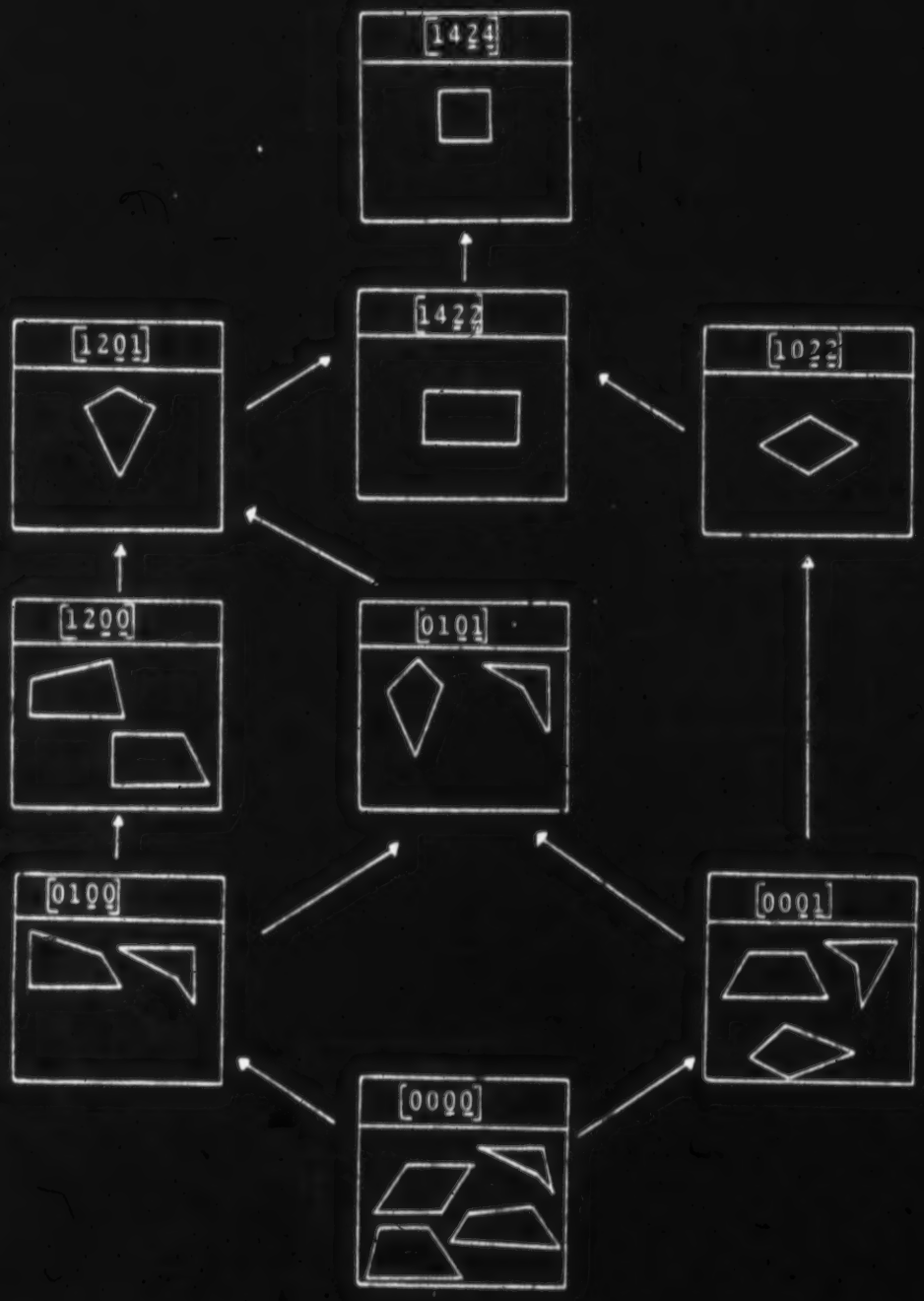


Figure 29

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{\langle 3,4 \rangle}$

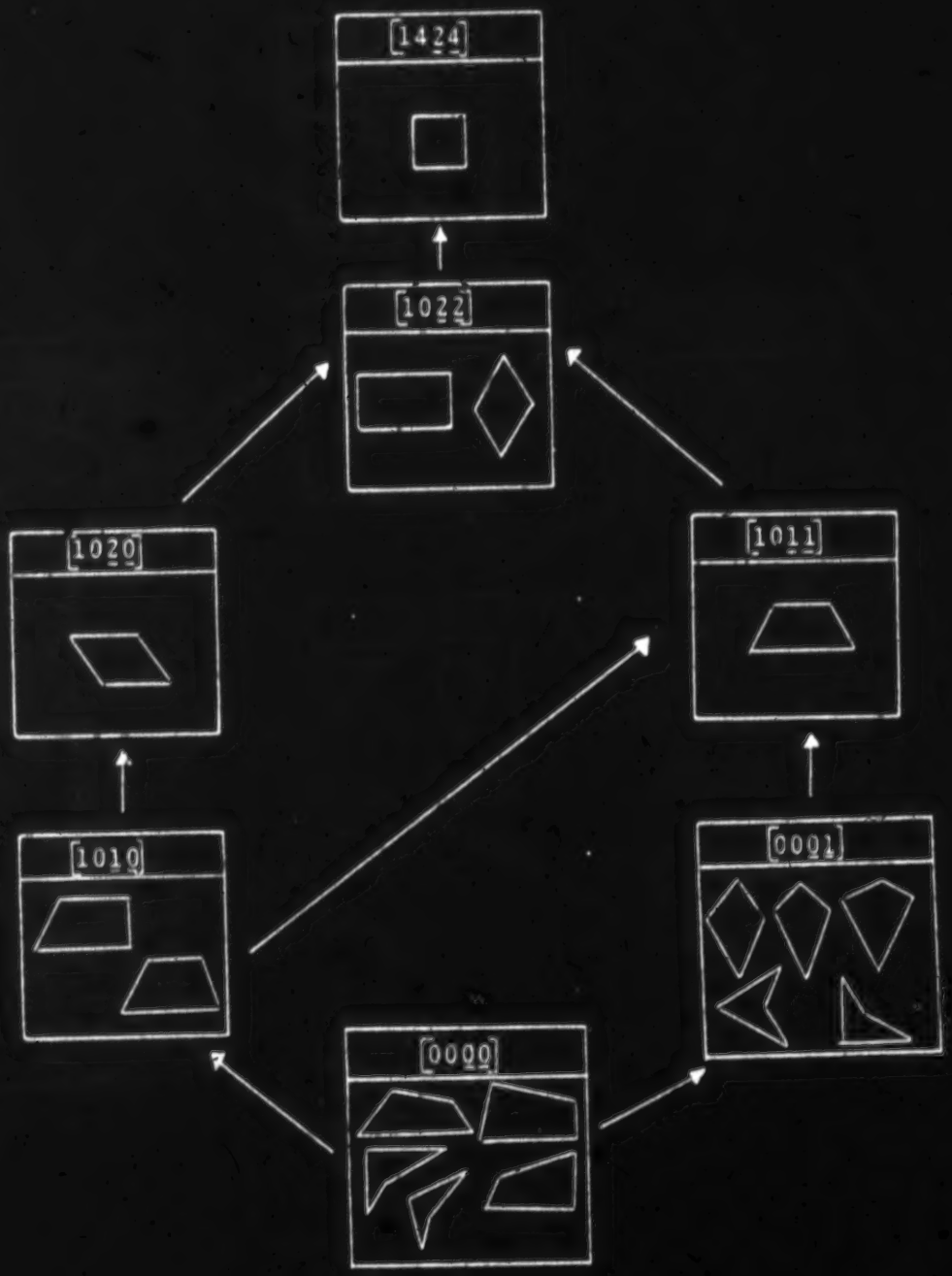


Figure 30

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{\langle 1,2,3 \rangle}$

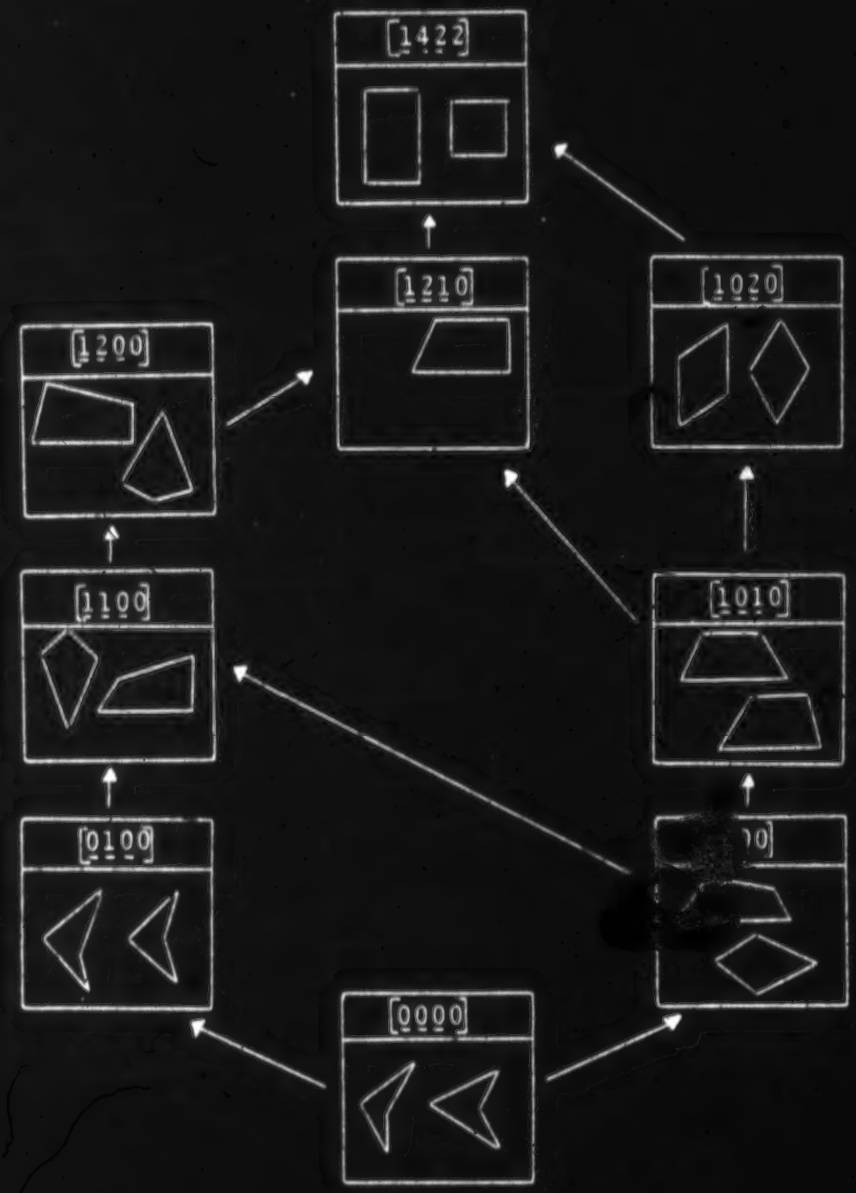


Figure 31

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{(1,2,4)}$

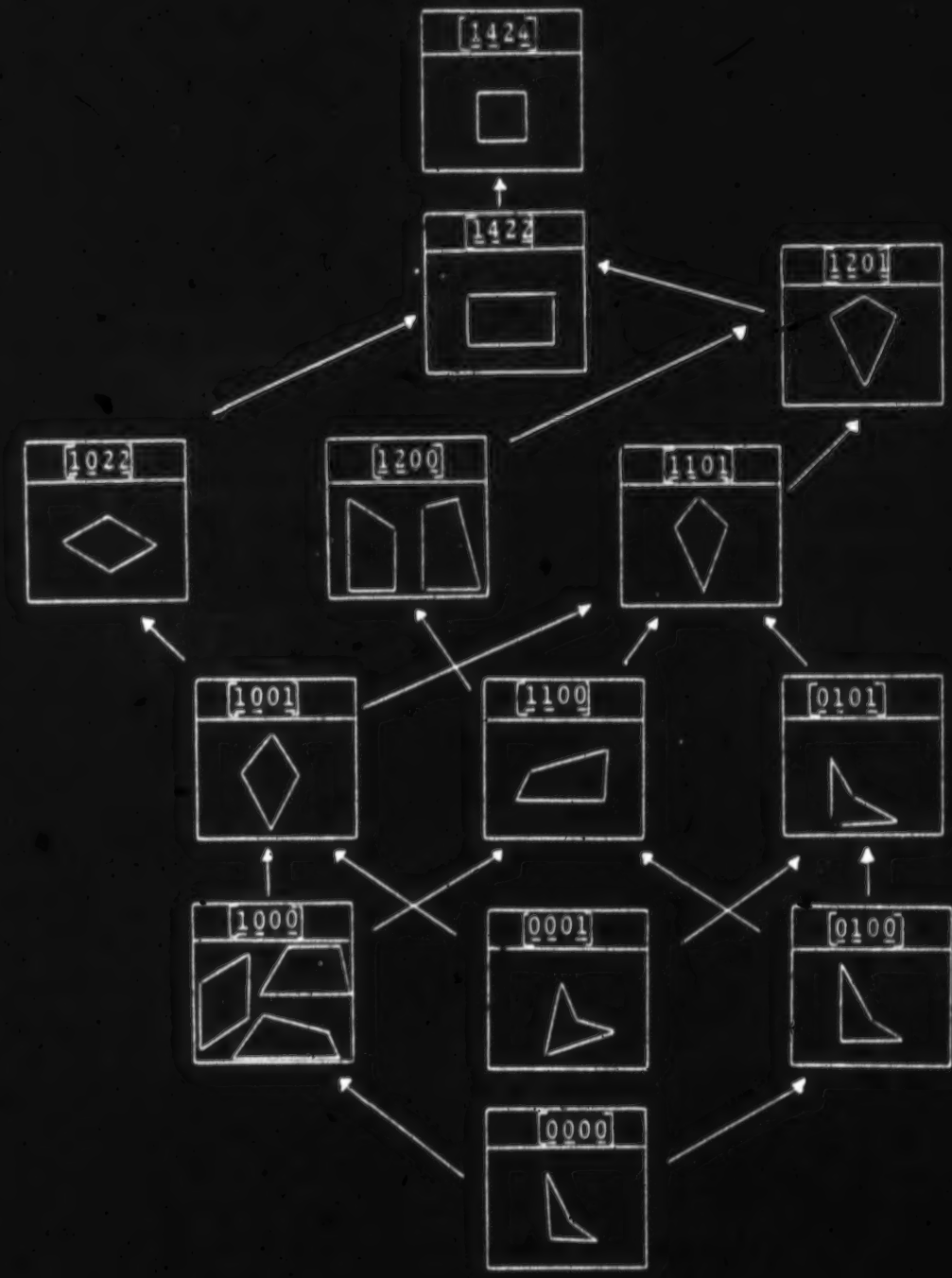


Figure 32

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{\langle 1,3,4 \rangle}$

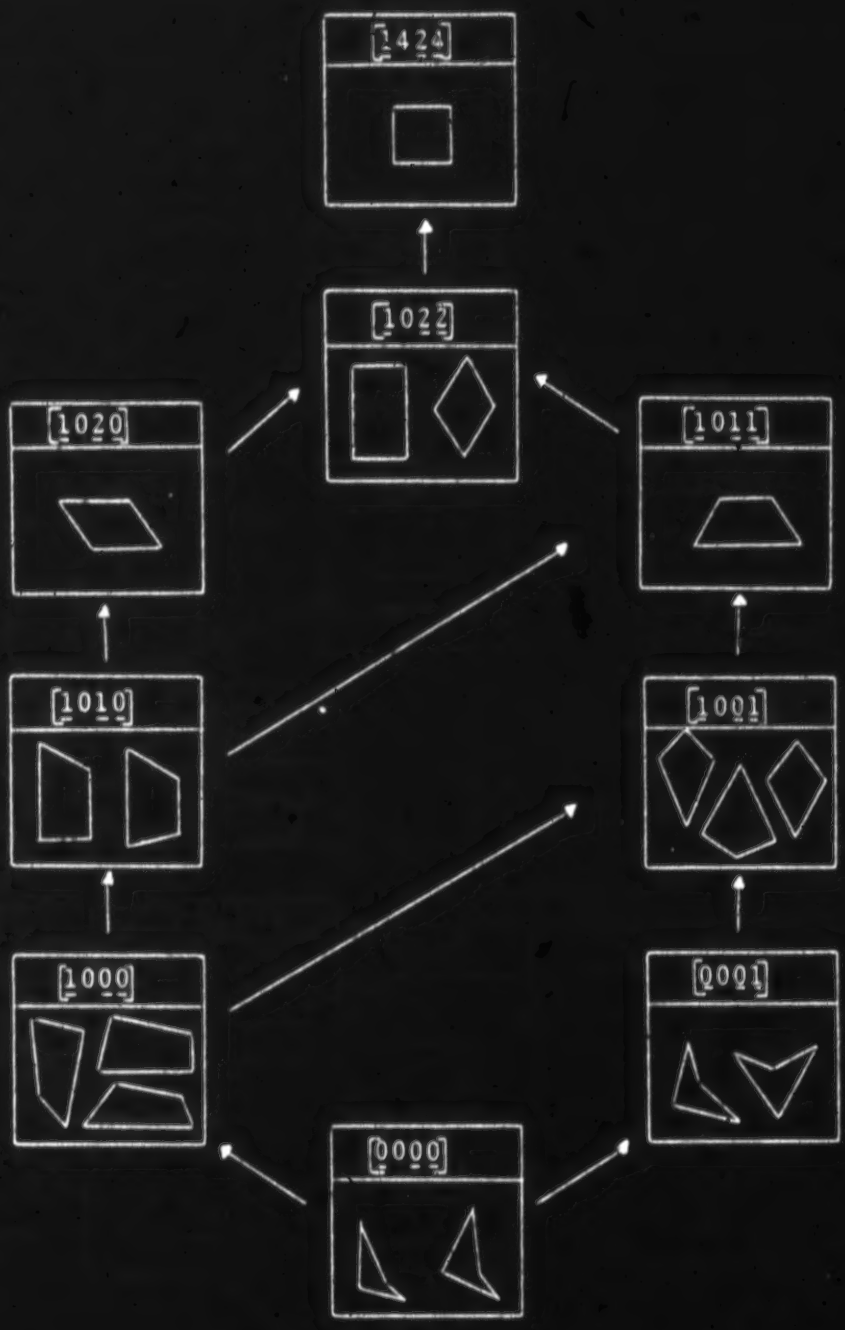


Figure 33

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{(2,3,4)}$

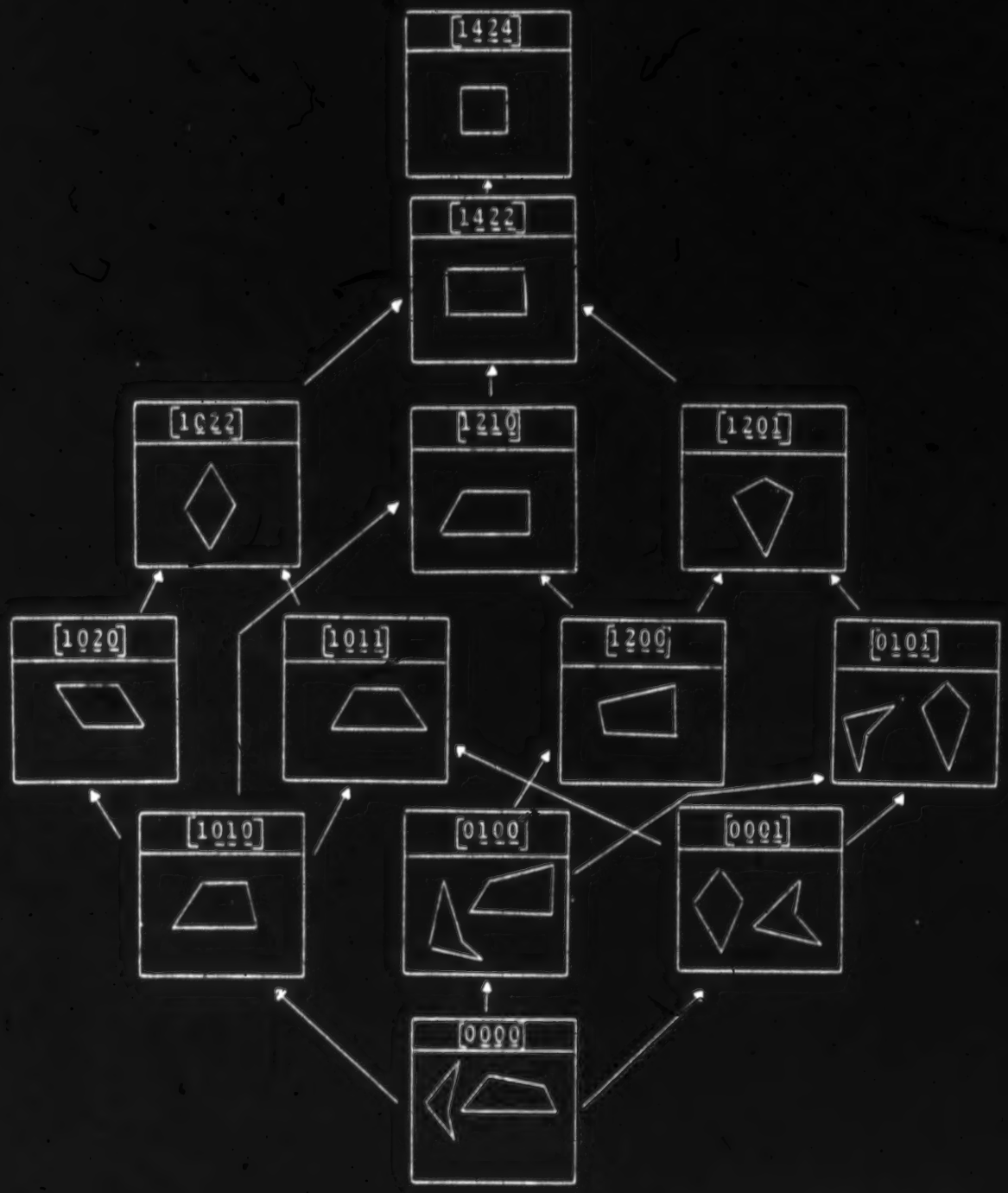


Figure 34

Graphe représentant le groupement logique de classes selon la partition: $Z_{(1,2,3,4)}$

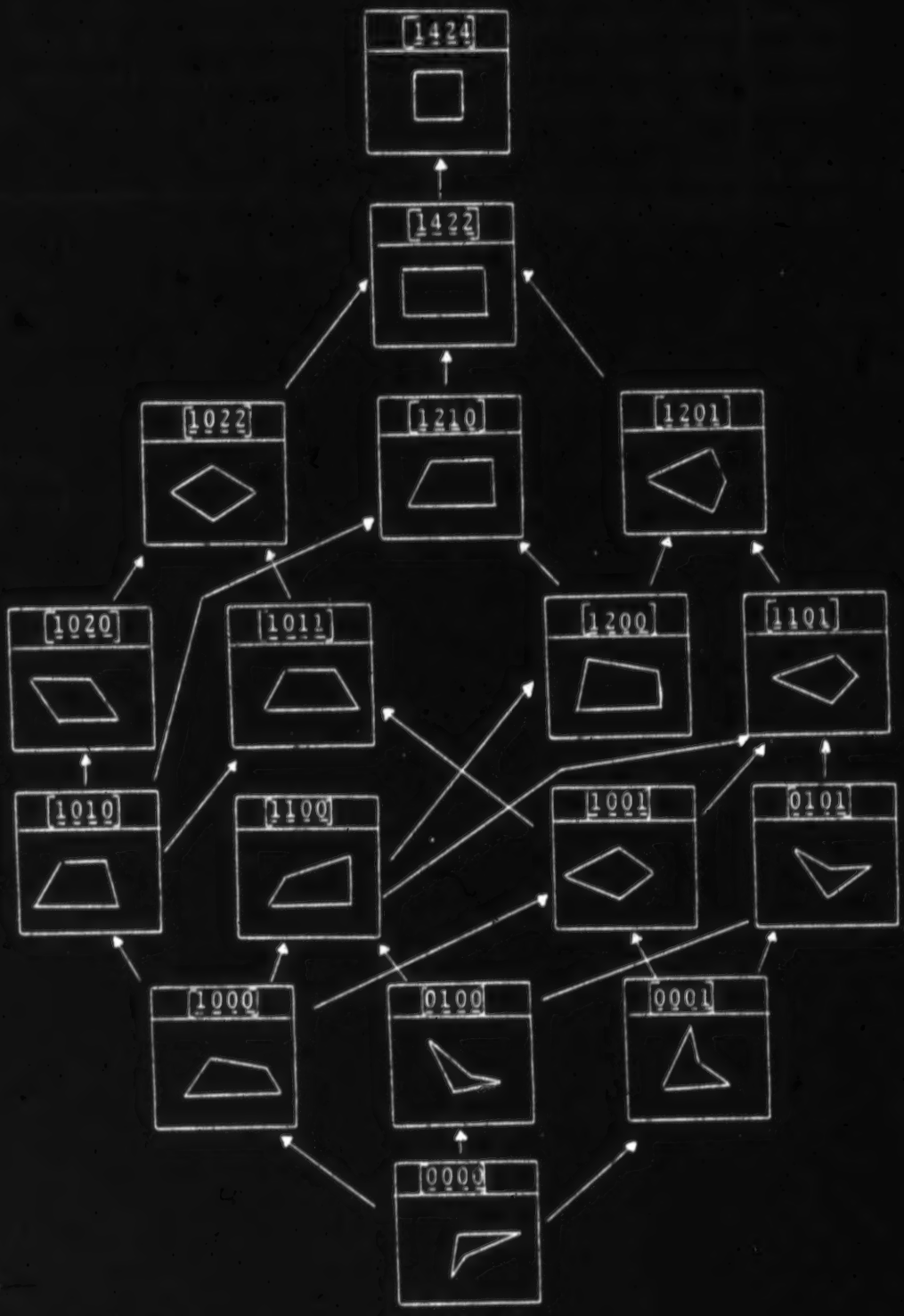


Figure 35

Nous avons ajouté en annexe de notre travail (annexe 3) un montage sur acétates qui nous permet en les superposant de reproduire les seize (16) groupements logiques des classes des partitions de M.(figures 20 à 35)

Les figures 36 a), b), c), d) et e) sont des répliques des acétates du montage.

$z_{(1)}$

Figure 36 a)

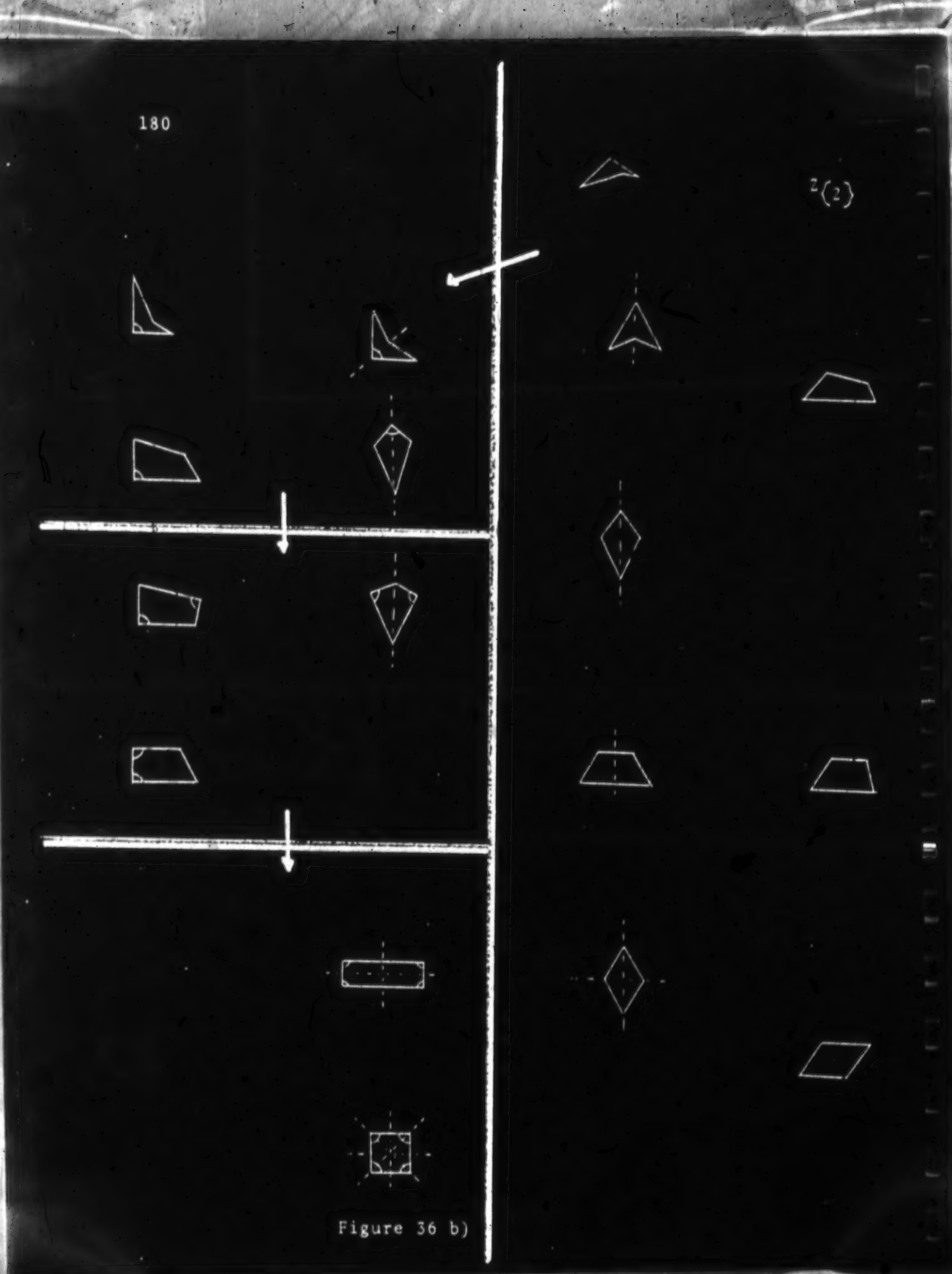


Figure 36 b)

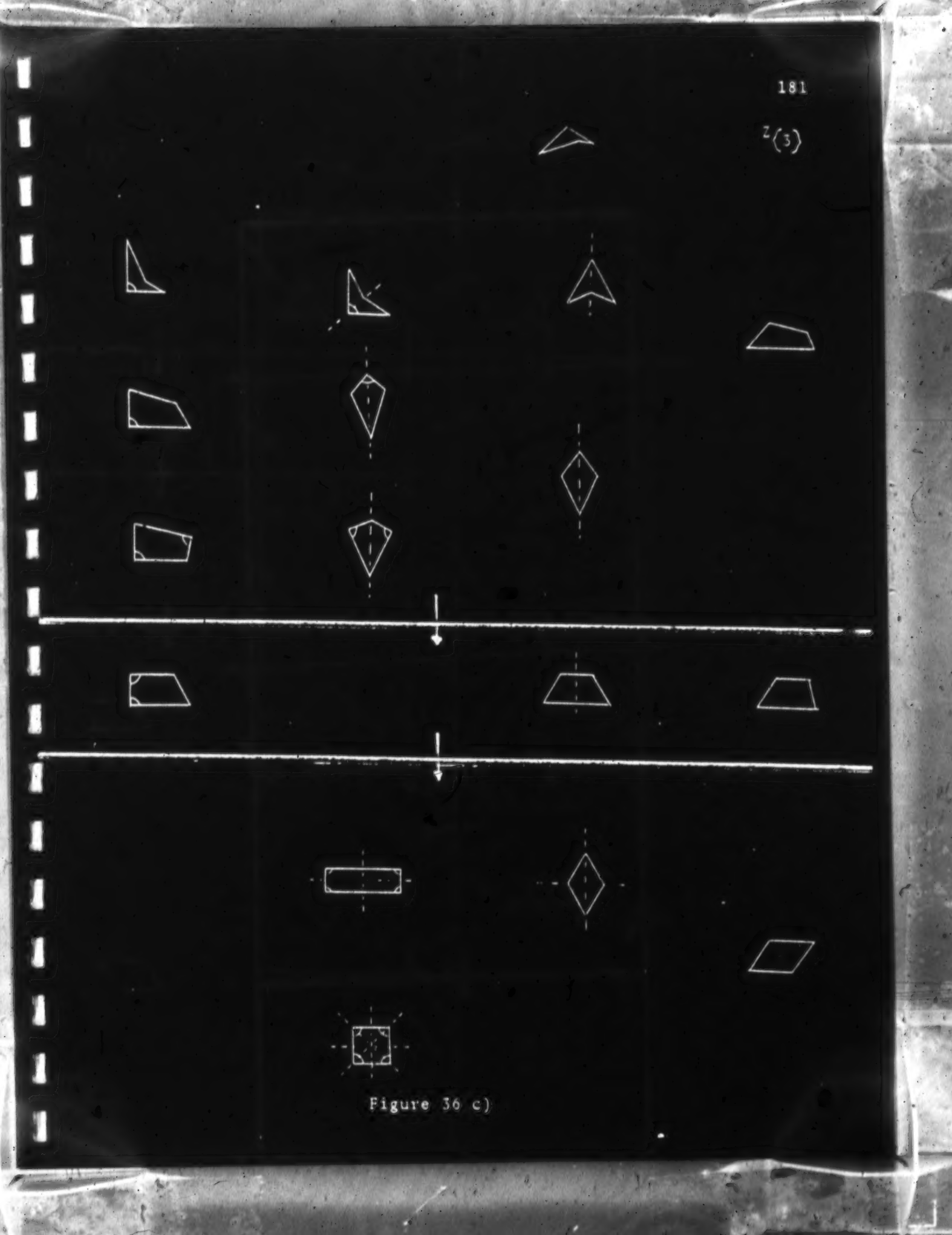


Figure 36 c)

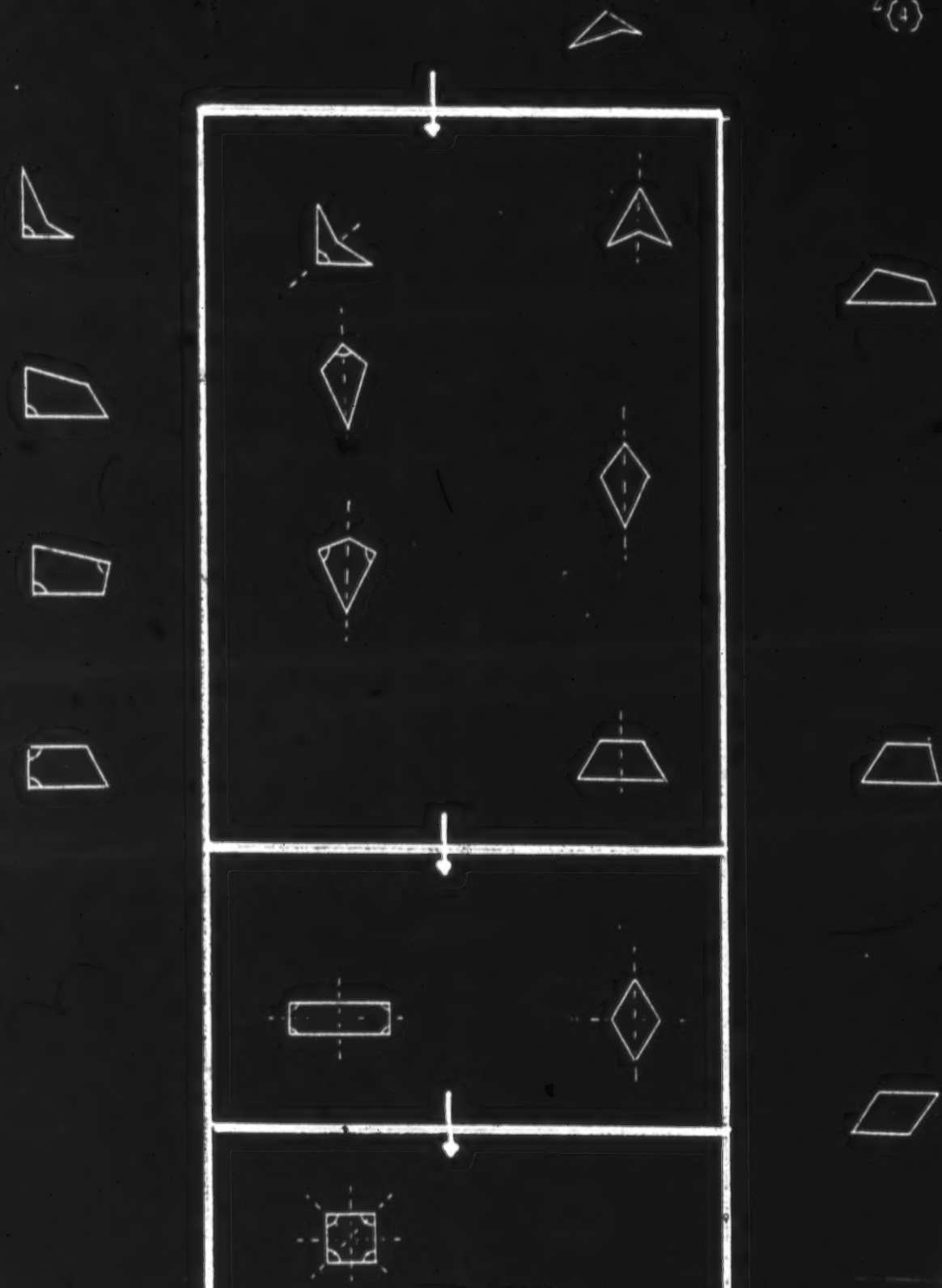


Figure 36 d)

$Z\langle 1,2,3,4\rangle$

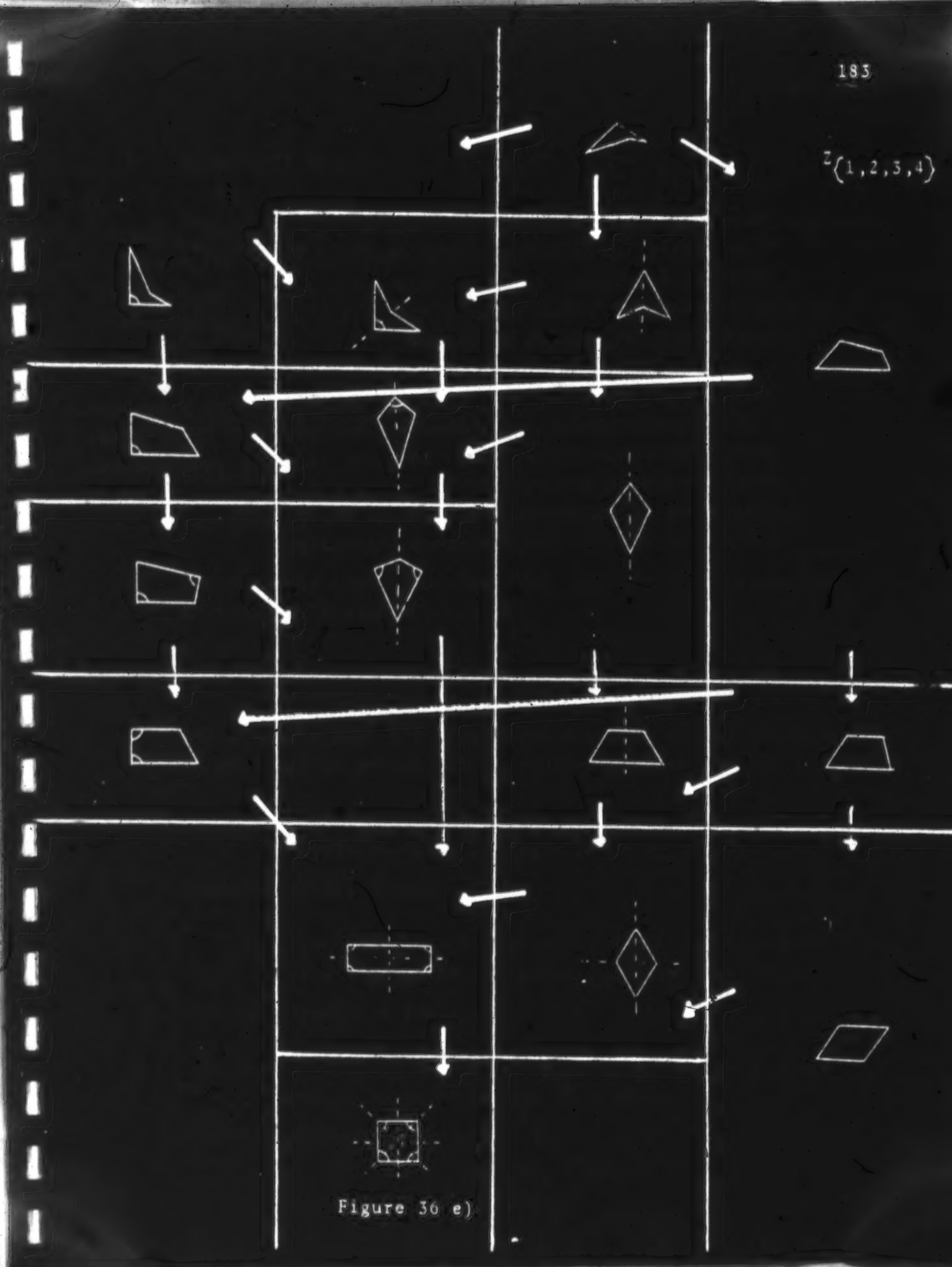


Figure 36 e)

Nous avons considéré dans l'ensemble Q un ensemble d'états M de toutes les partitions possibles selon les propriétés choisies, sur lequel ensemble nous avons défini une relation de raffinement. Nous avons ainsi obtenu un groupement de superposition complète (chapitre 1).

Nous avons ensuite considéré dans l'ensemble Q des ensembles d'états correspondant aux classes engendrées par chacune des partitions; nous avons défini dans cet ensemble une relation de "plus grande perfection" des propriétés.
Nous avons ainsi obtenu pour chacune des partitions un groupement logique des classes (chapitre 2).

3 Groupement booléen:

Maintenant nous ferons correspondre les groupements logiques des classes à des groupements booléens.

Pour ce faire nous considérerons maintenant des ensembles d'éléments et nous établirons une relation d'inclusion entre ces ensembles.

3,1 Formation d'ensembles dans Q.

Soient:

Q: l'ensemble des éléments possédant la propriété "quadrilatères";

cet ensemble peut être symbolisé par 0000; il correspond en fait à l'ensemble universel.

C: l'ensemble des éléments possédant la propriété "convexe";

cet ensemble peut être symbolisé par 1000 (si on conserve la même valeur positionnelle donnée au chapitre 1).

D_1: l'ensemble des éléments possédant la propriété "avoir au moins un angle droit";

ensemble symbolisé par 0100.

P_1: l'ensemble des éléments possédant la propriété "avoir au moins une paire de côtés parallèles";

ensemble symbolisé par 0010.

S_1: l'ensemble des éléments possédant la propriété "avoir au moins un axe de symétrie";

ensemble symbolisé par 0001.

Note:

Nous utilisons ici des symboles numériques qui paraissent semblables pour désigner les ensembles et les classes (données au chapitre 2) uniquement pour des fins utilitaires en vue d'établir une certaine correspondance; en effet ces symboles désignent des réalités différentes dans les deux cas.

Exemple:

Au chapitre 2, le symbole [0100] désigne la classe des éléments qui possèdent un angle droit: cette classe pourrait être symbolisée différemment car:

$$[0100] = [1100] = [1101] = [0101]$$

Cette classe désigne les quadrilatères suivants:

Dans le présent chapitre, selon les définitions données en 3,1 le symbole 0100 désigne l'ensemble des éléments qui possèdent au moins un angle droit:

$D_1 =$

Le diagramme de Venn suivant permet de représenter les ensembles définis précédemment dans Q.

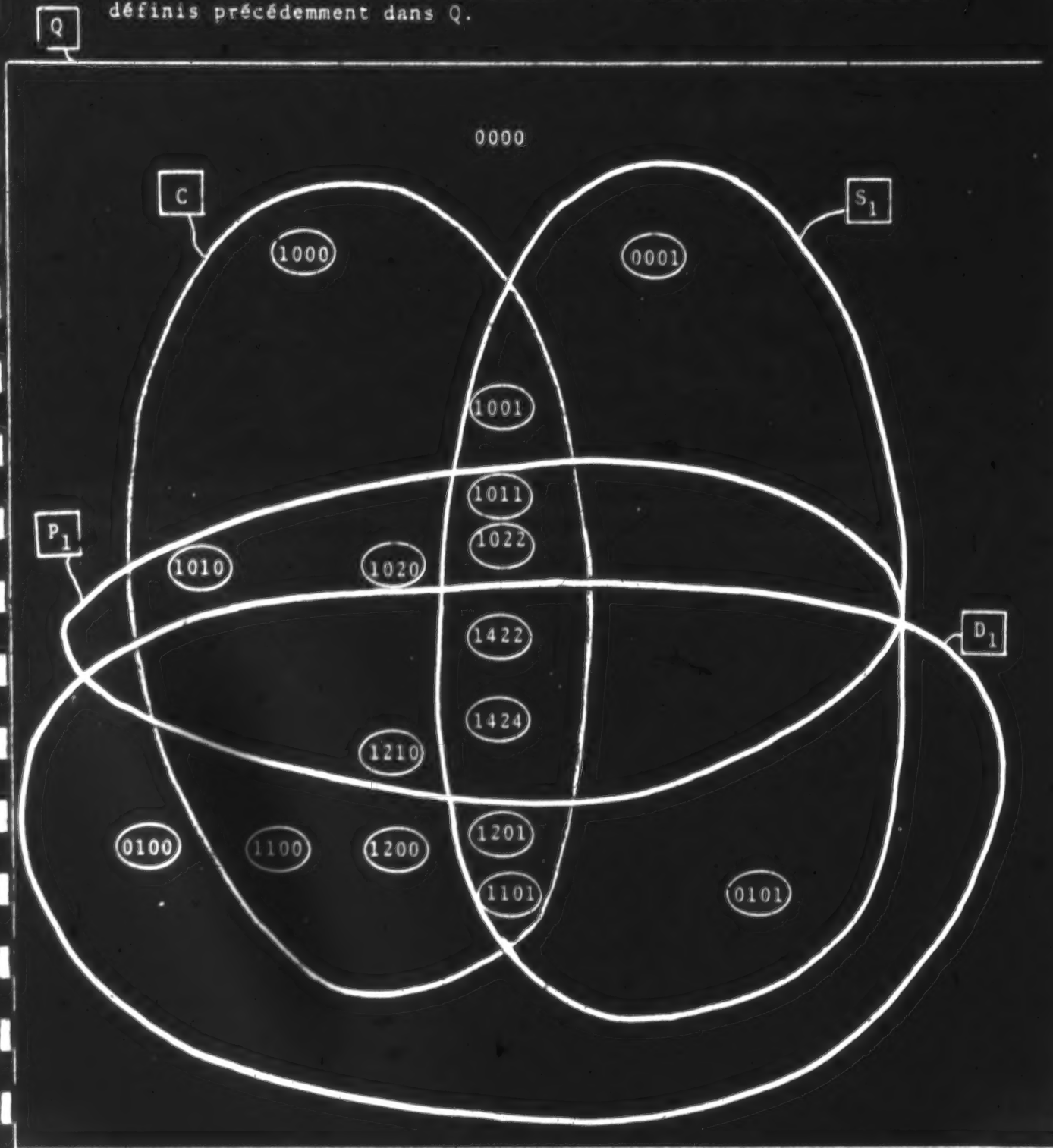


Figure 37

Ce diagramme de la figure 37 permet de visualiser que:

$C \subset Q$; $D_1 \subset Q$; $P_1 \subset Q$; $S_1 \subset Q$

et que $C \cap S_1 \subset C$

$C \cap S_1 \subset S_1$ etc...

et que $C \cap D_1 \cap P_1 \subset C \cap D_1$

$C \cap D_1 \cap P_1 \subset C \cap P_1$

$C \cap D_1 \cap P_1 \subset C \cap P_1$ etc...

En continuant cette démarche nous obtiendrons les graphes suivants (figure 38a) 38b) représentant la relation d'inclusion (relation de couverture). Nous obtenons un groupement de treillis.

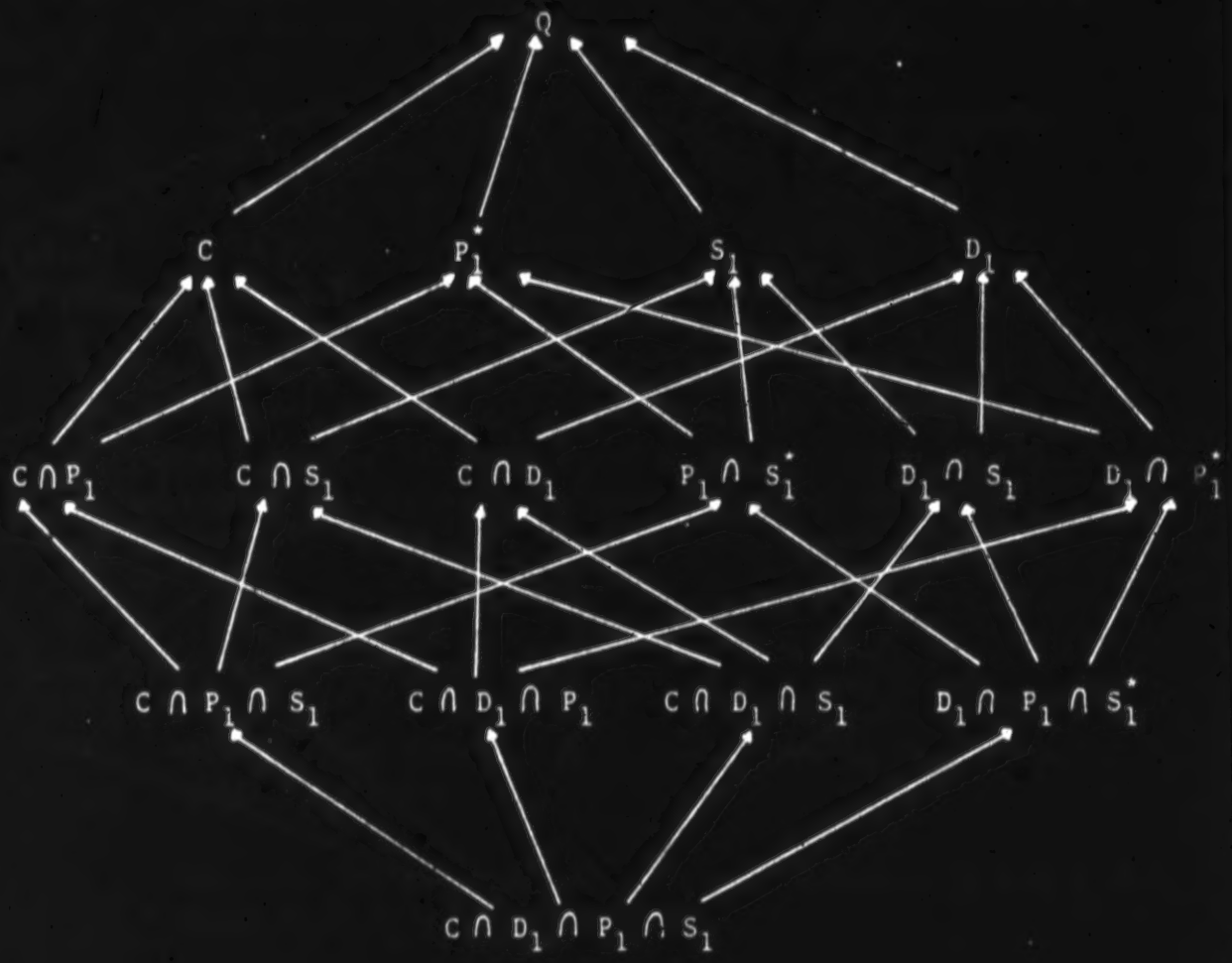

Ω
C
P1
S1
D1
C ∩ P1
C ∩ S1
C ∩ D1
P1 ∩ S1
D1 ∩ S1
D1 ∩ P1
C ∩ P1 ∩ S1
C ∩ D1 ∩ P1
C ∩ D1 ∩ S1
D1 ∩ P1 ∩ S1
C ∩ D1 ∩ P1 ∩ S1

Figure 38 a)

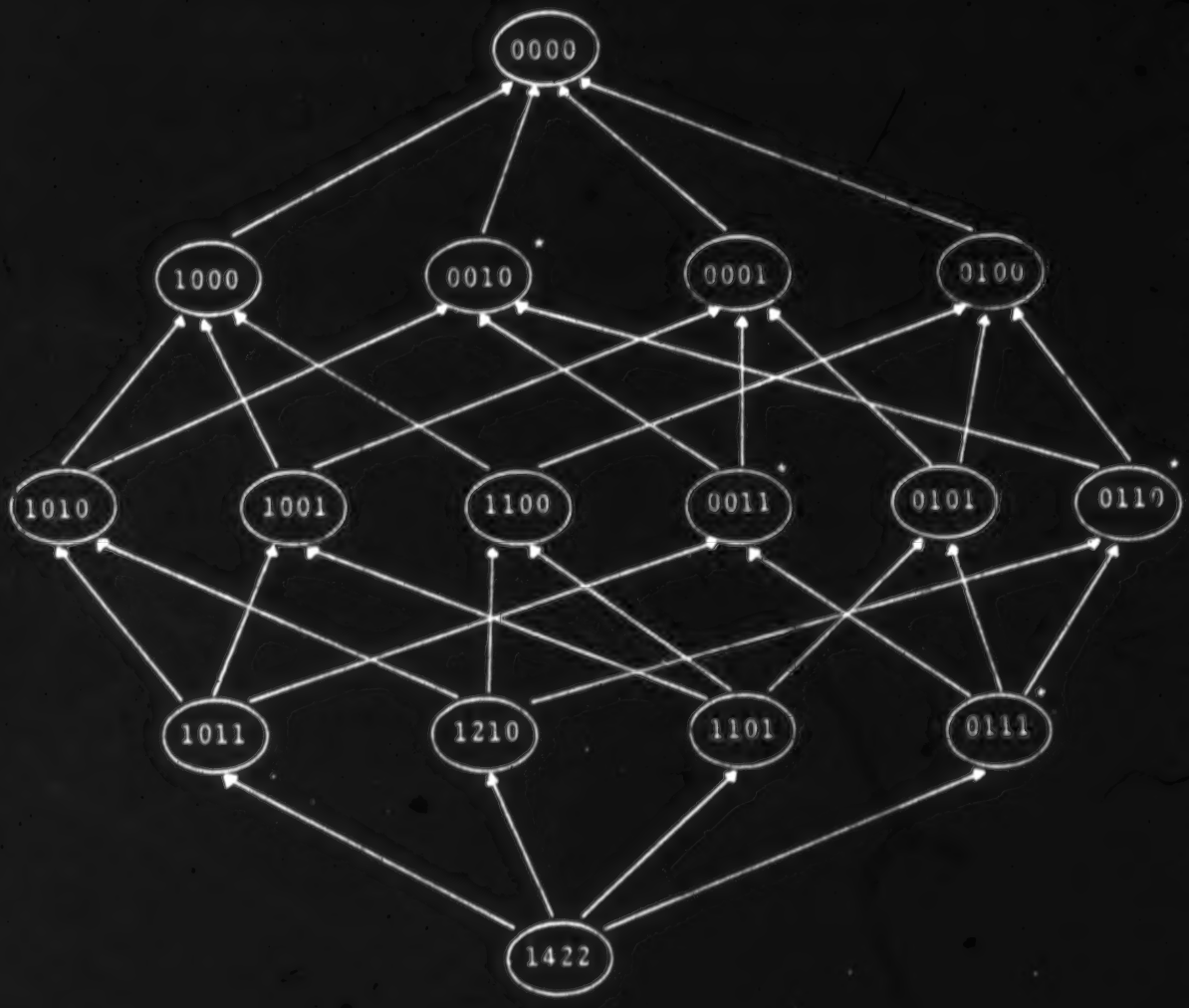

0000
1000
0010
0001
0100
1010
1001
1100
0011
0101
0110
1011
1210
1101
0111
1422

Figure 38 b)

Ces deux graphes sagittaux nous laissent insatisfaits pour deux raisons.

1) Ils ont comme états 16 ensembles alors que le diagramme de Venn illustre bien qu'il n'y a en fait que 12 ensembles où se retrouvent des éléments.

2) Ils ne correspondent pas au groupement de classes de la partition $Z_{(1,2,3,4)}$ qui est plus fin (cf. figure 35).

Tentons de clarifier le 1er point:

Si nous voulons que les graphes des figures 38 a) et 38 b) -qui représenteraient plutôt une "situation idéalisée"- s'adaptent mieux à la réalité des ensembles représentés dans le diagramme de Venn, il semble que nous devons nous intéresser à l'ensemble P_1 qui possède les intersections vides.

Le diagramme de Venn montre:

-que tous ces éléments de P_1 sont éléments de $C \cap P_1$; donc: $P_1 = C \cap P_1$

-que tous les éléments de $P_1 \cap S_1$ sont éléments de $C \cap P_1 \cap S_1$; donc: $P_1 \cap S_1 = C \cap P_1 \cap S_1$

-que tous les éléments de $D_1 \cap P_1$ sont éléments de $C \cap D_1 \cap P_1$ donc: $D_1 \cap P_1 = C \cap D_1 \cap P_1$

-que tous les éléments de $D_1 \cap P_1 \cap S_1$ sont éléments de $C \cap D_1 \cap P_1 \cap S_1$; donc: $D_1 \cap P_1 \cap S_1 = C \cap D_1 \cap P_1 \cap S_1$

Etant données ces égalités d'ensembles nous pouvons donc réduire les graphes des figures 38 a) et 38 b) en omettant simplement les ensembles marqués d'un astérique.

Nous obtenons alors un groupement de treillis (figure 39 a) et 39 b) qui est un sous-groupement de celui représenté par les figures 38 a) et 38 b).

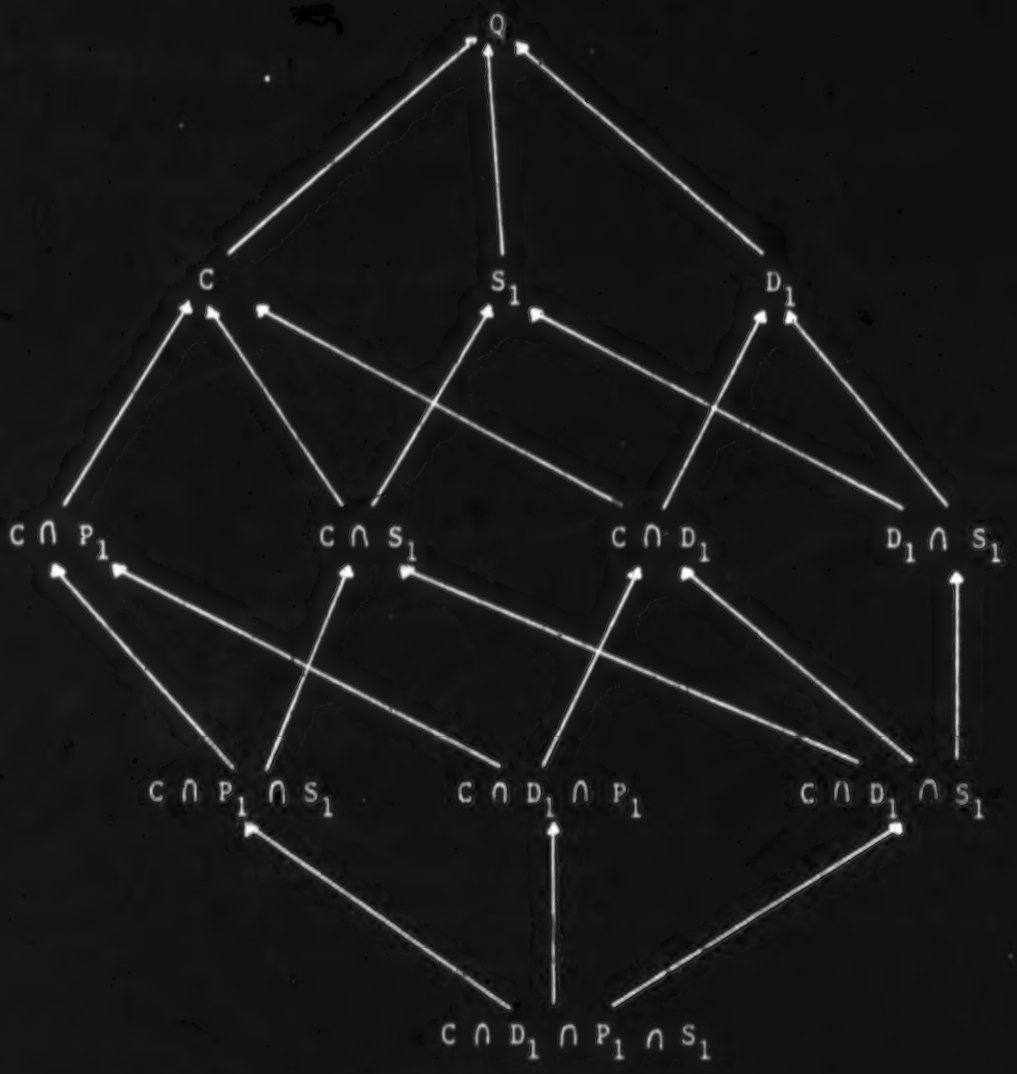

Q
C
S_1
D_1
$C \cap P_1$
$C \cap S_1$
$C \cap D_1$
$D_1 \cap S_1$
$C \cap P_1 \cap S_1$
$C \cap D_1 \cap P_1$
$C \cap D_1 \cap S_1$
$C \cap D_1 \cap P_1 \cap S_1$

Figure 39 a)

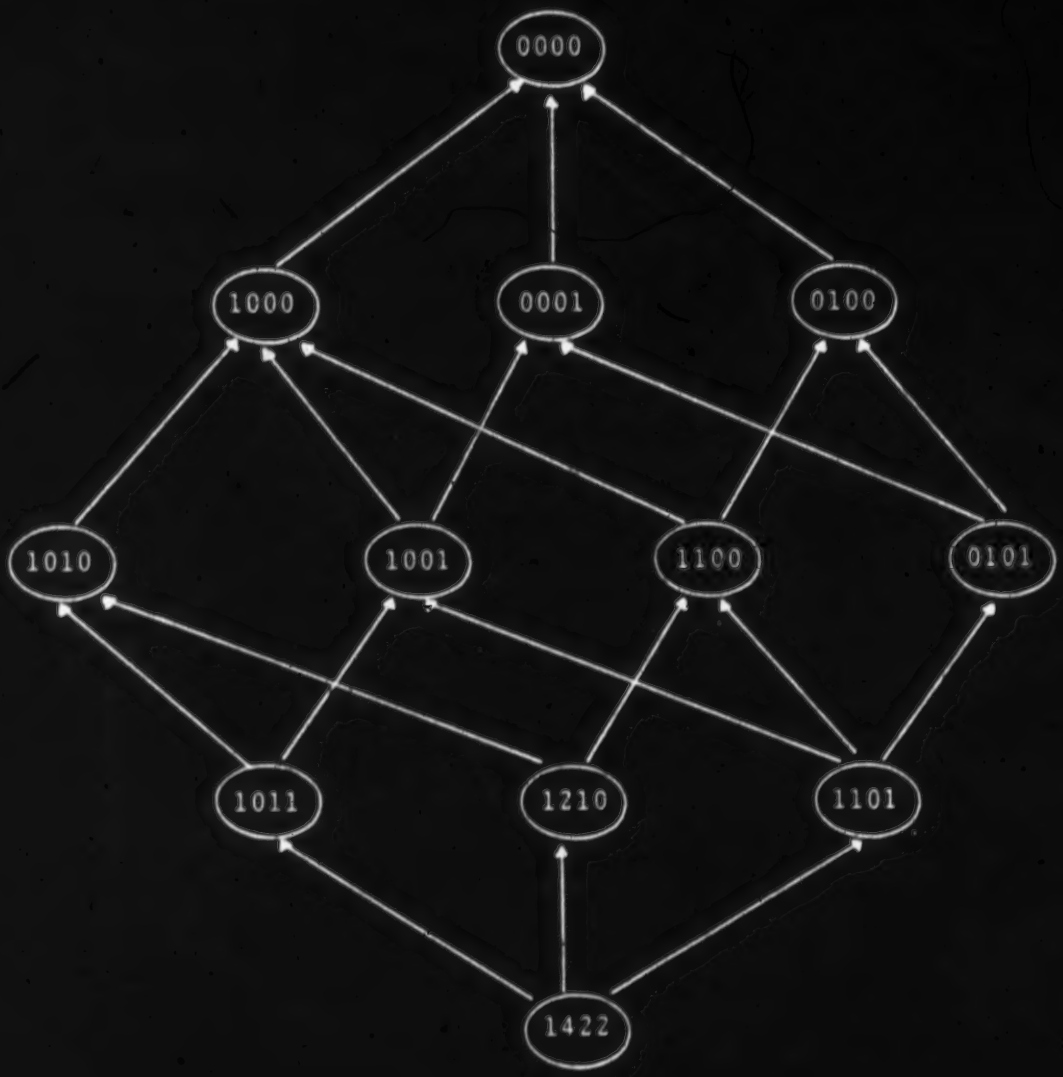


Figure 39 b)

Tentons de clarifier le 2^{e} point: (énoncé en page 191)

Pour ce faire, il suffit de raffiner nos ensembles de départ Q, C, D_1, P_1 et S_1 par la formation de sous-ensembles convenables.

3,2 Formation de sous-ensembles.

Dans D_1 (ensembles possédant au moins un angle droit) définissons:

-D_2 : l'ensemble des éléments possédant au moins deux angles droits: cet ensemble est inclus dans D_1 et correspond sans le diagramme de Venn à la région "brune ligne pointillée".

-D_4 : l'ensemble des éléments possédant ouatre angles droits; cet ensemble est inclus dans D_1 et D_2 et correspond dans le diagramme de Venn à la région "jaune".

Dans P_1 (ensemble possédant au moins une paire de côtés parallèles) définissons:

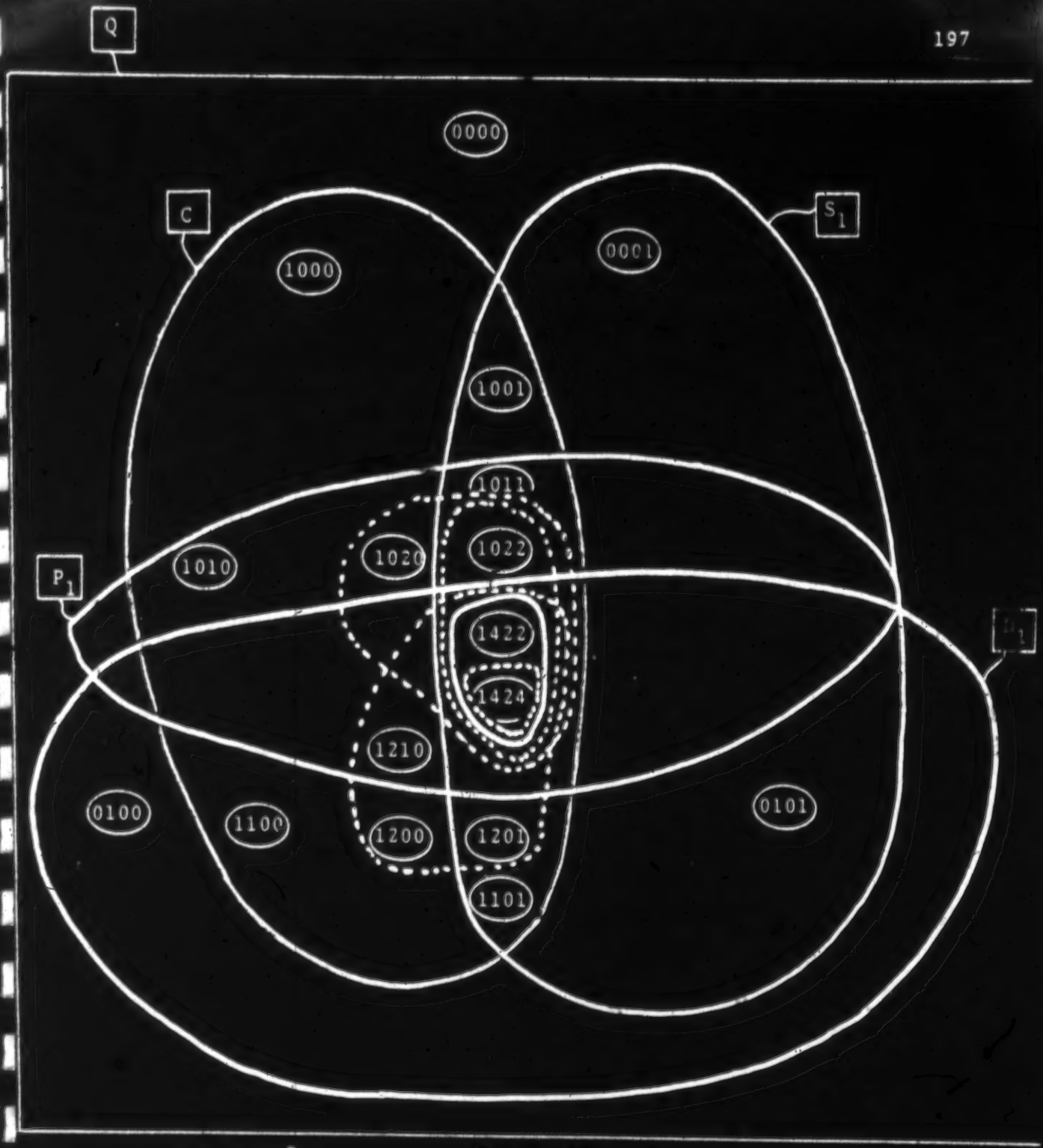
-P_2 : l'ensemble des éléments possédant deux paires de côtés parallèles; cet ensemble est inclus dans P_1 et correspond dans le diagramme de Venn à la région "verte ligne pointillée".

Dans S_1 (ensemble possédant au moins un axe de symétrie) définissons:

-S_2 : l'ensemble des éléments possédant au moins deux axes de symétrie; cet ensemble est inclus dans S_1 et correspond dans le diagramme de Venn à la région "rouge ligne pointillée".

-S_4 : l'ensemble des éléments possédant quatre axes de symétrie; cet ensemble est inclus dans S_1 et S_2 et correspond dans le diagramme de Venn à la région "noire ligne pointillée".

Nous obtenons ainsi le diagramme de Venn suivant: (figure 40).



Légende:

D_2

D_4

P_2

S_2

S_4

Figure 40

Le graphe de ce groupement booléen est représenté par les figures 41 a) et 41 b).

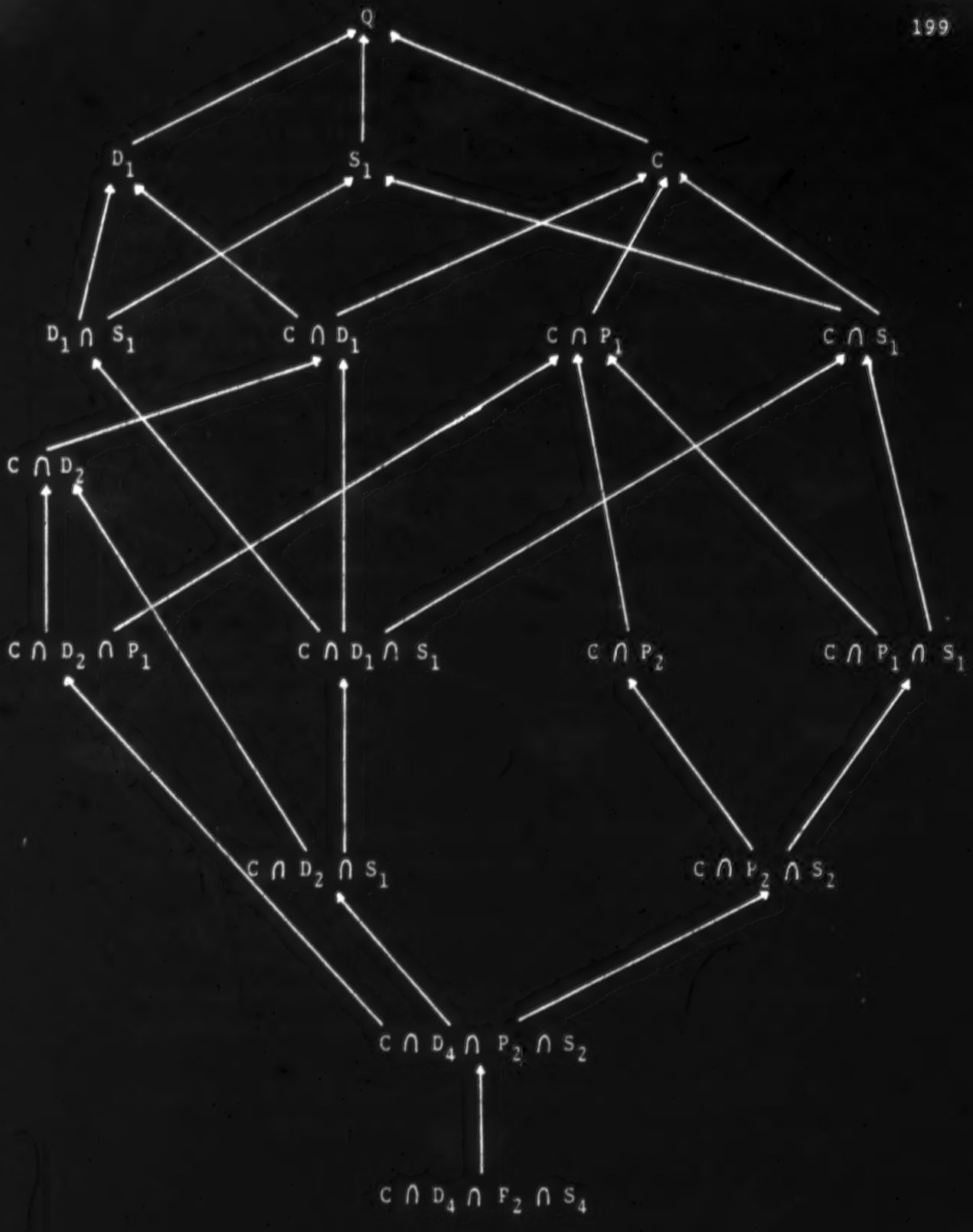

Q
D1
S1
C
D1 ∩ S1
C ∩ D1
C ∩ P1
C ∩ S1
C ∩ D2
C ∩ D2 ∩ P1
C ∩ D1 ∩ S1
C ∩ P2
C ∩ P1 ∩ S1
C ∩ D2 ∩ S1
C ∩ P2 ∩ S2
C ∩ D4 ∩ P2 ∩ S2
C ∩ D4 ∩ F2 ∩ S4

Figure 41 a)

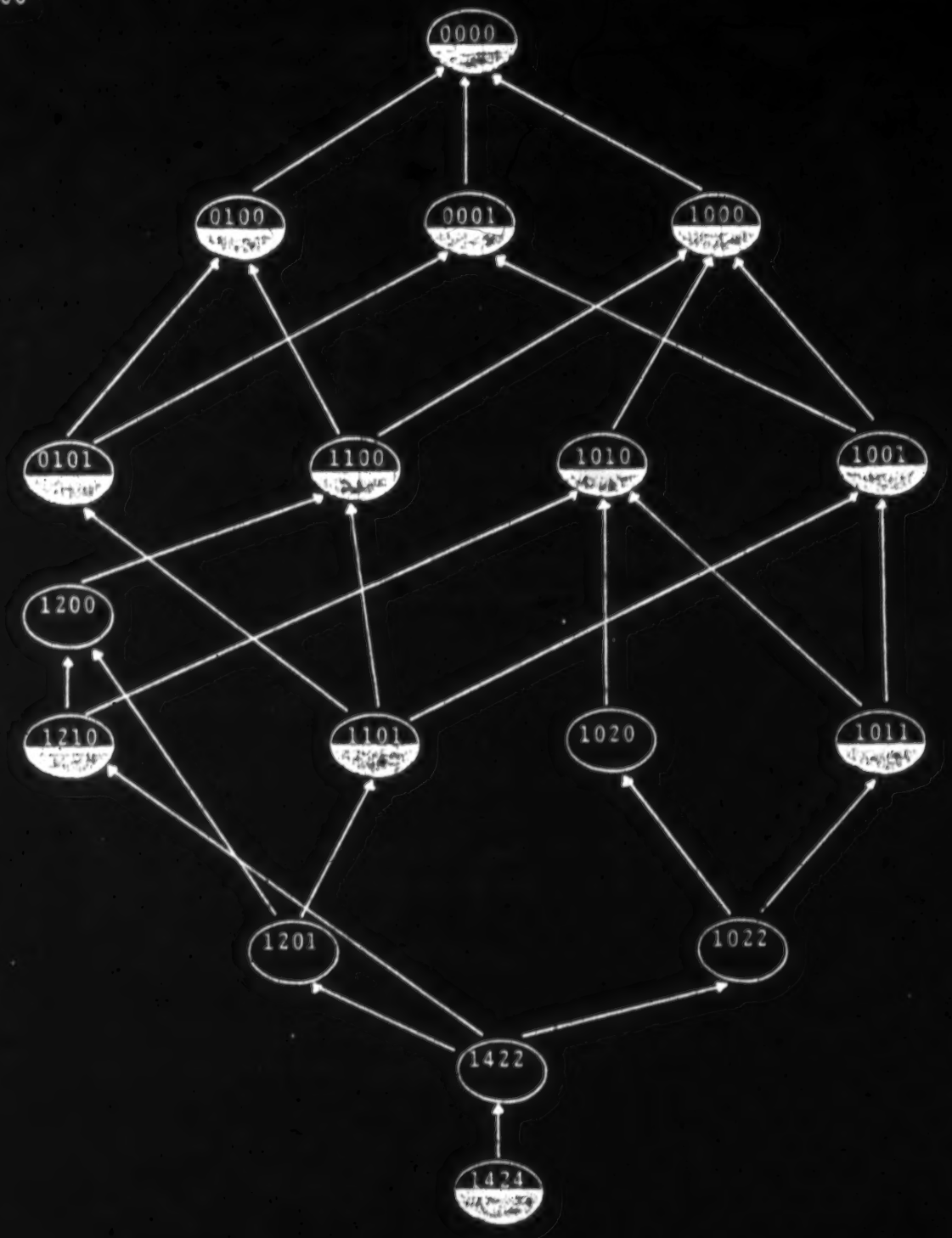

0000
0100
0001
1000
0101
1100
1010
1001
1200
1210
1101
1020
1011
1201
1022
1422
1424

Figure 41 b)

Ce groupement booléen correspond alors au diagramme de Venn de la figure 40.
Il est "isomorphe" au groupement des classes de la partition $Z_{\{1,2,3,4\}}$ (figure 35). Nous y reconnaissons le groupement des figures 39 a) et 39 b) comme sous-groupement.

3,3 Définition du groupement booléen correspondant au groupement de classes selon la partition $Z_{\{1,2,3,4\}}$

Soit: Q : un ensemble de quadrilatères.

Soit: T : tous les sous-ensembles non vides dans Q: Q, C, D_1, D_2, D_4, P_1, P_2, S_1, S_2, S_4

c'est-à-dire, tous les sous-ensembles et leurs intersections auxquels appartient au moins un élément de Q.

Définissons $\trianglelefteq$ dans T:

$$\trianglelefteq = \{(A, B) / A, B \subset T \text{ et } A \subseteq B\}$$

La relation $\triangle$ représentée par les flèches du graphe est la relation de couverture de $\trianglelefteq$.

$(T, \triangle)$ est un ensemble ordonné.

Pour toute paire d'éléments de T on définit une borne supérieure et une borne inférieure.

$A \sqcup B$ = P P E (plus petit ensemble) qui contient la réunion $A \cup B$.

$A \sqcap B = A \cap B$

$(T, \trianglelefteq)$ est un treillis

$(T, \triangle)$ est un groupement de treillis; on l'appelle groupement logique d'inclusion ou groupement booléen.

3,4 Moyen de visualiser la relation d'inclusion du groupement booléen correspondant au groupement de classes selon la partition $Z_{(1,2,3,4)}$.

Nous avons tenté de visualiser cette relation d'inclusion sur les ensembles à l'aide d'acétates présentés en annexe 4 des figures 42 à 58 inclusivement.

0000: Ensemble des quadrilatères

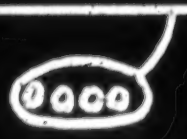


Figure 42

0100: Ensemble des quadrilatères qui ont au moins un angle droit

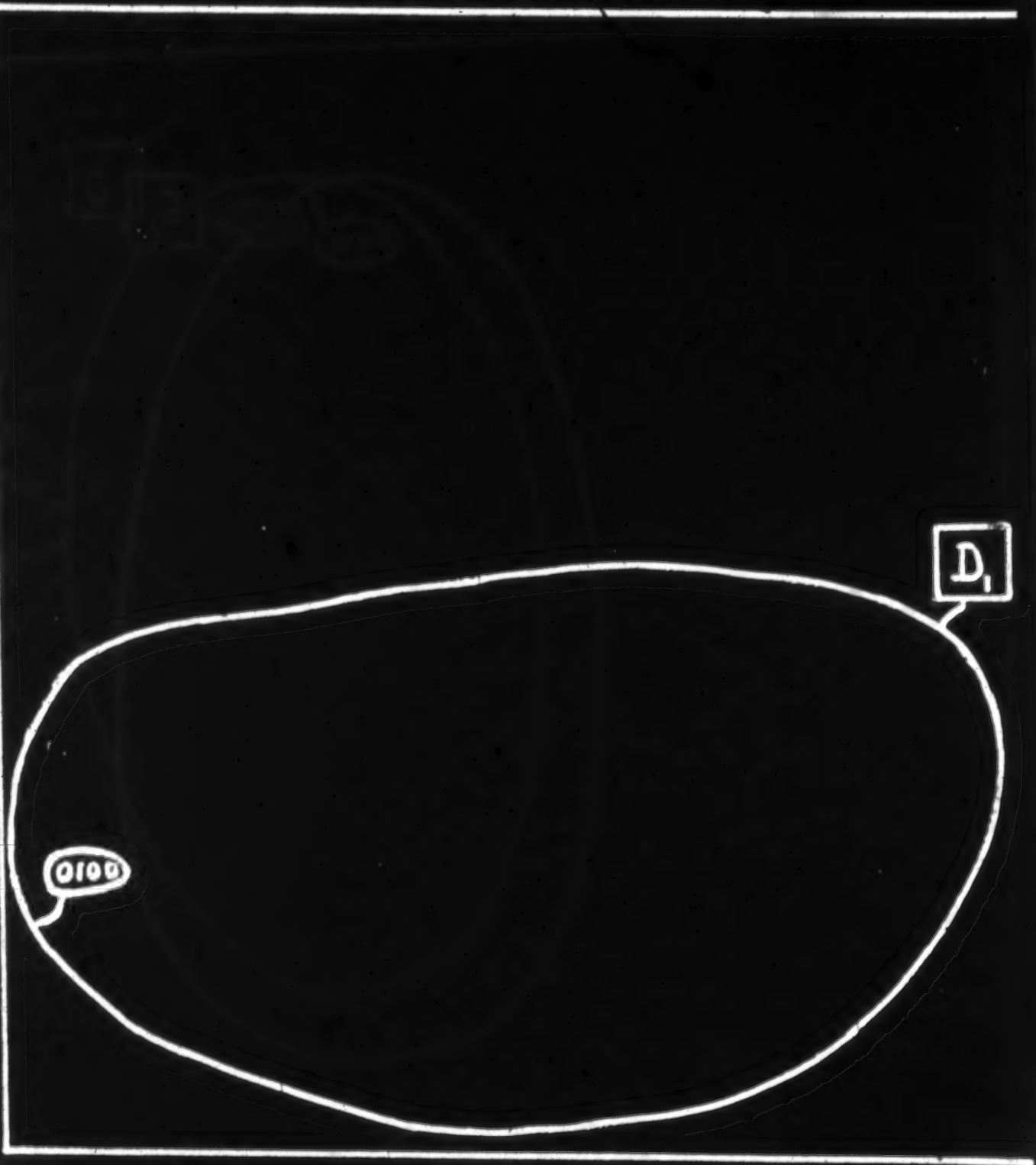


Figure 43

0001: Ensemble de quadrilatères ayant au moins un axe de symétrie.

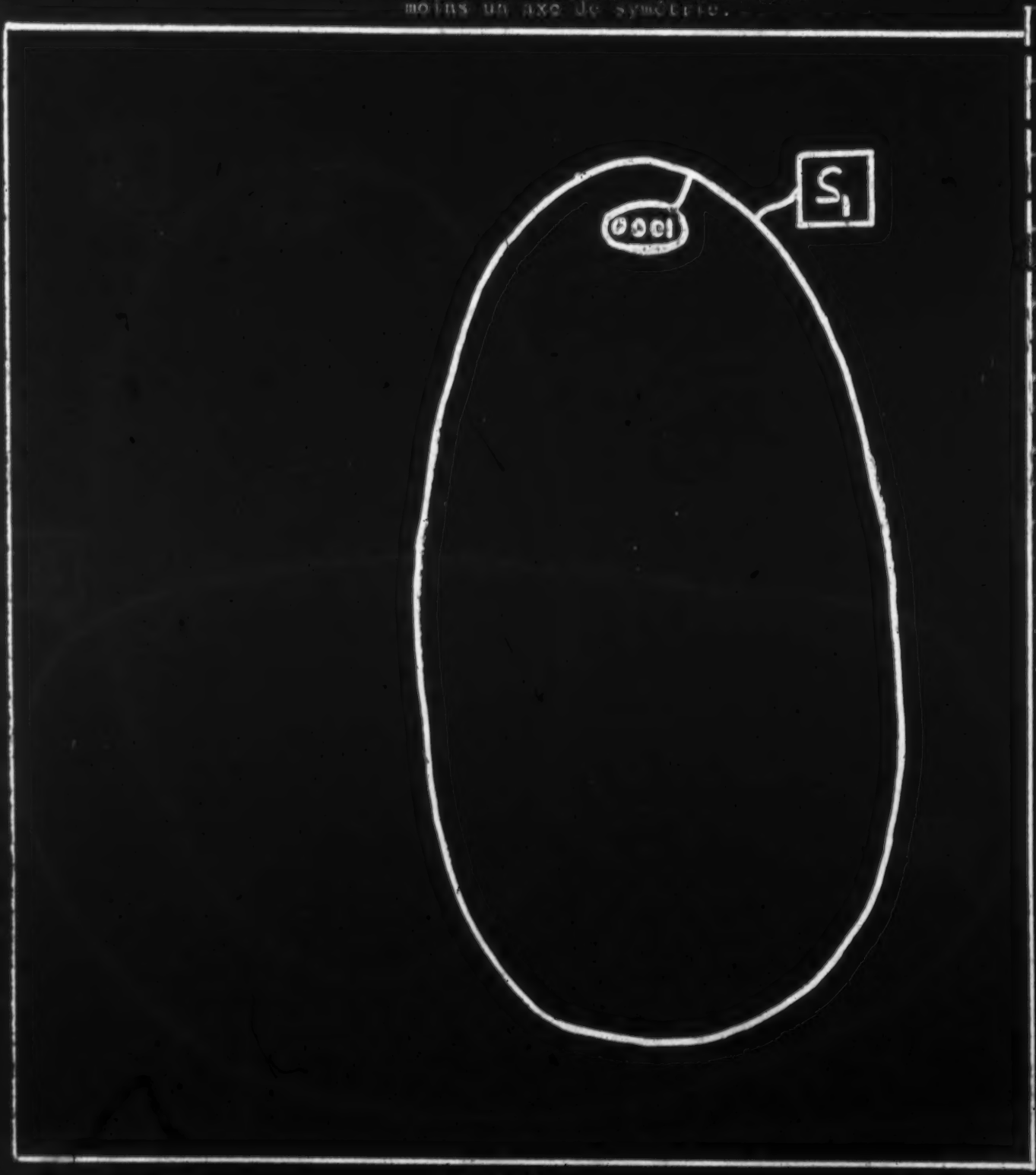


Figure 44

1000: Ensemble des quadrilatères convexes.

Figure 45

0101: Ensemble des quadrilatères ayant au moins un angle droit et au moins un axe de symétrie.

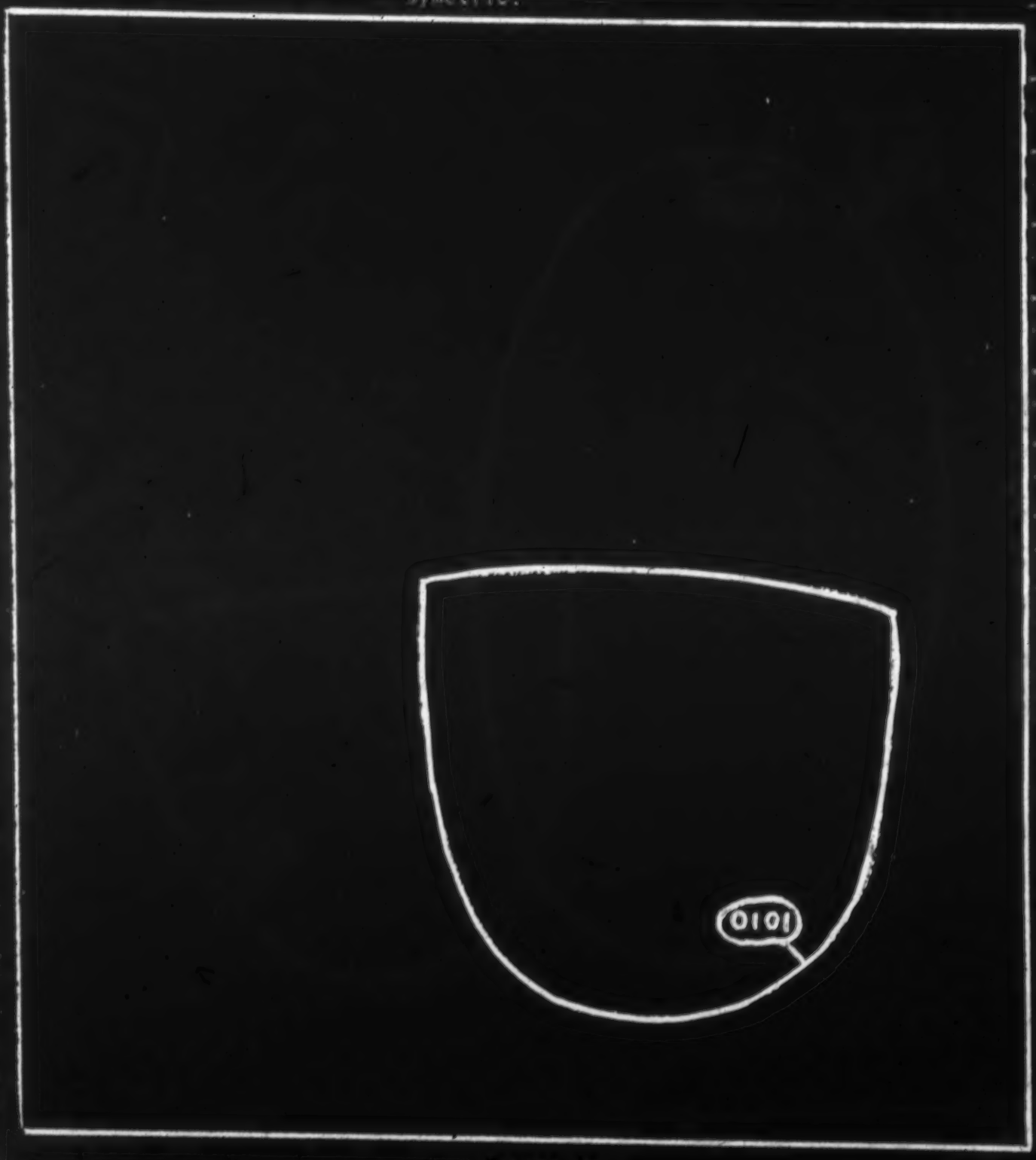


Figure 46

1100: Ensemble des quadrilatères convexes ayant au moins un angle droit.

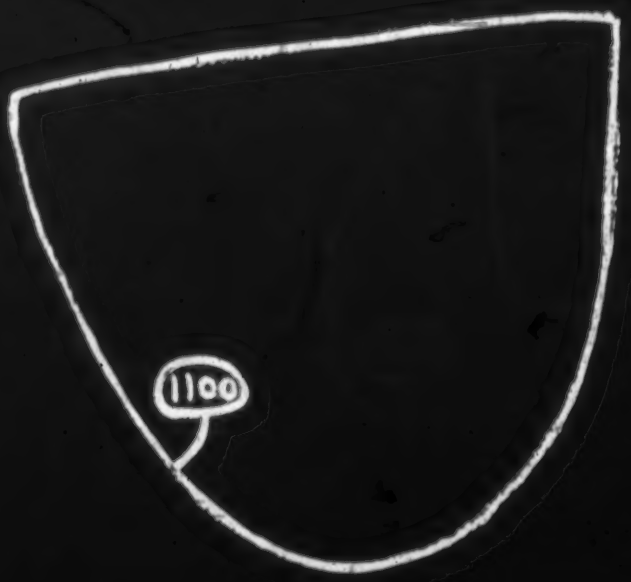


Figure 47

1010: Ensemble des quadrilatères convexes ayant au moins une paire de côtés parallèles.

Figure 48

1200: Ensemble de quadrilatères convexes ayant au moins 2 angles droits.

Figure 49

1210: Ensemble des quadrilatères convexes ayant au moins deux angles droits et au moins une paire de côtés parallèles.

Figure 50

1101: ensemble des quadrilatères convexes ayant au moins un angle droit et au moins un axe de symétrie.

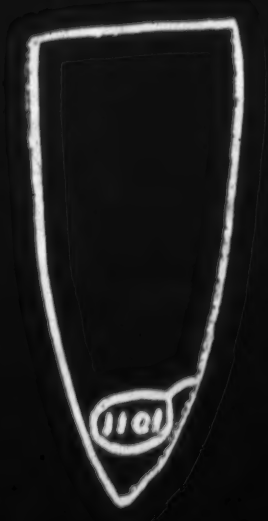


Figure 51

1020: Ensemble des quadrilatères convexes ayant deux paires de côtés parallèles.

Figure 52

1011: Ensemble de quadrilatères convexes ayant au moins une paire de côtés parallèles et au moins un axe de symétrie.

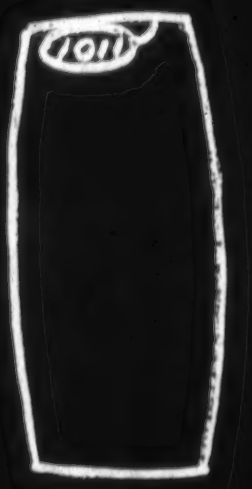


Figure 53

1001: Ensemble de quadrilatères convexes
ayant au moins un axe de symétrie.

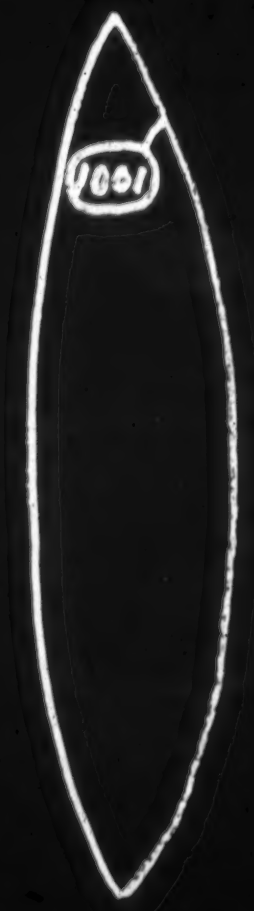


Figure 54

1201: Ensemble de quadrilatères convexes ayant au moins deux angles droits et au moins un axe de symétrie.

Figure 55

1022: Ensemble de quadrilatères convexes ayant deux paires de côtés parallèles et au moins 2 axes de symétrie.

Figure 56

1422: Ensemble de quadrilatères convexes ayant quatre angles droits, deux paires de côtés parallèles et au moins deux axes de symétrie.

Figure 57

1424: Ensemble de quadrilatères convexes ayant quatre angles droits, deux paires de côtés parallèles et quatre axes de symétrie.

Figure 58

Ainsi chaque ensemble de T est représenté sur un acétate et situé dans la région du diagramme de Venn qu'il occupe.

Vérifions si l'ensemble A symbolisé par 1101 (figure 51) est inclus dans l'ensemble B symbolisé par 0100 (figure 43): superposons les acétates correspondant à ces deux ensembles et on a $A \subset B$.

Vérifions si l'ensemble A symbolisé par 1022 (figure 56) est inclus dans l'ensemble B symbolisé par 1200 (figure 49). En superposant ces deux acétates on voit que ces deux ensembles ne sont pas comparables selon la relation d'inclusion.

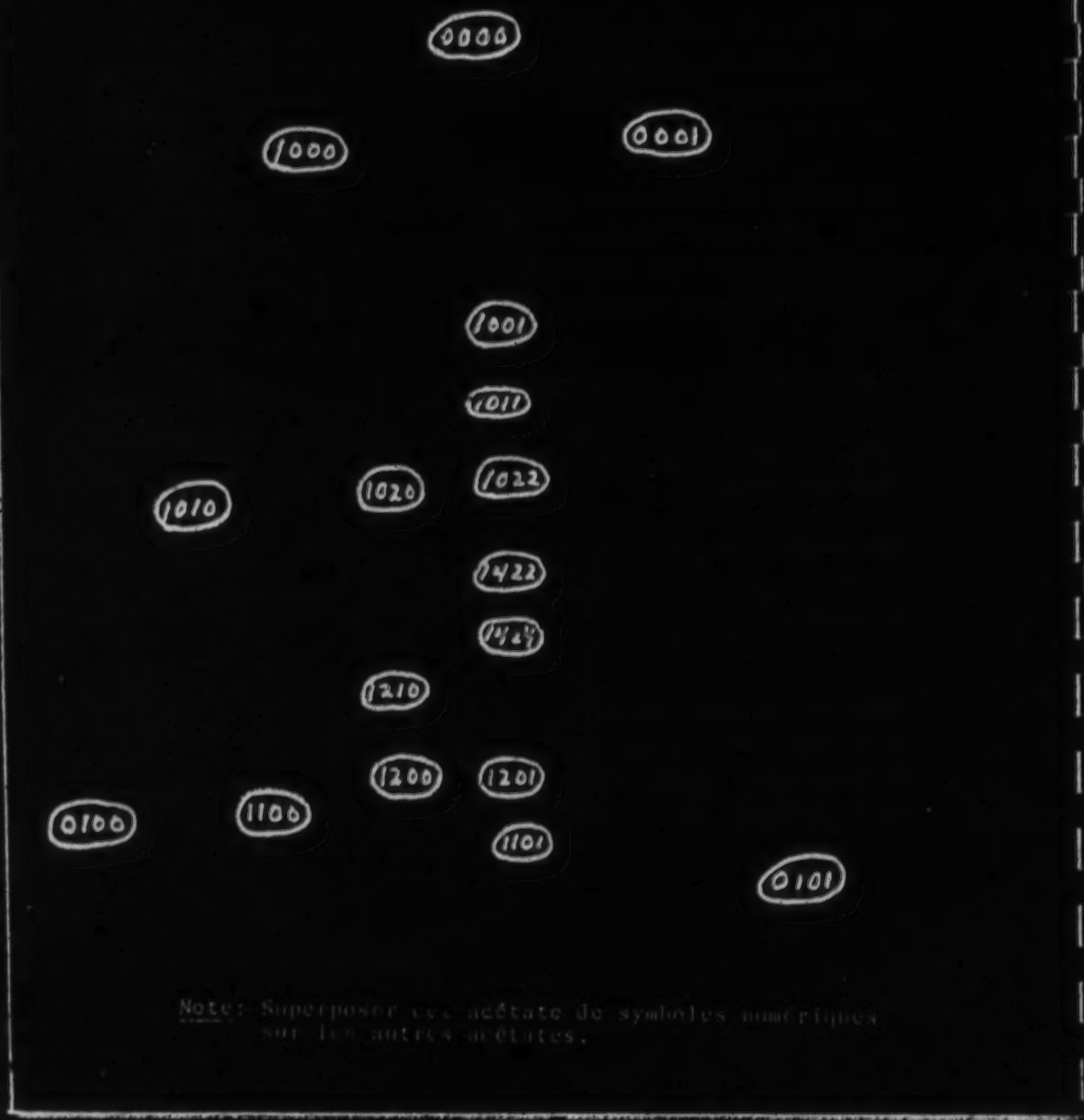
3,5 Représentation au moyen du graphe sagittal et du diagramme de Venn des groupements booléens correspondant aux groupements logiques des classes pour les seize partitions de M trouvées au chapitre 1.

Nous avons défini plus en détail le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(1,2,3,4)}$.

Pour les autres groupements nous ne présenterons que les diagrammes de Venn et les graphes sagittaux. Les diagrammes de Venn sont représentés en annexe 5. (Voir les figures 59 a) à 74 a) inclusivement).

Q

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement topologique des classes pour la partition Z_β



Note: Superposer ces acétate de symboles numériques sur les autres acétates.

Figure 39 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(1)}$

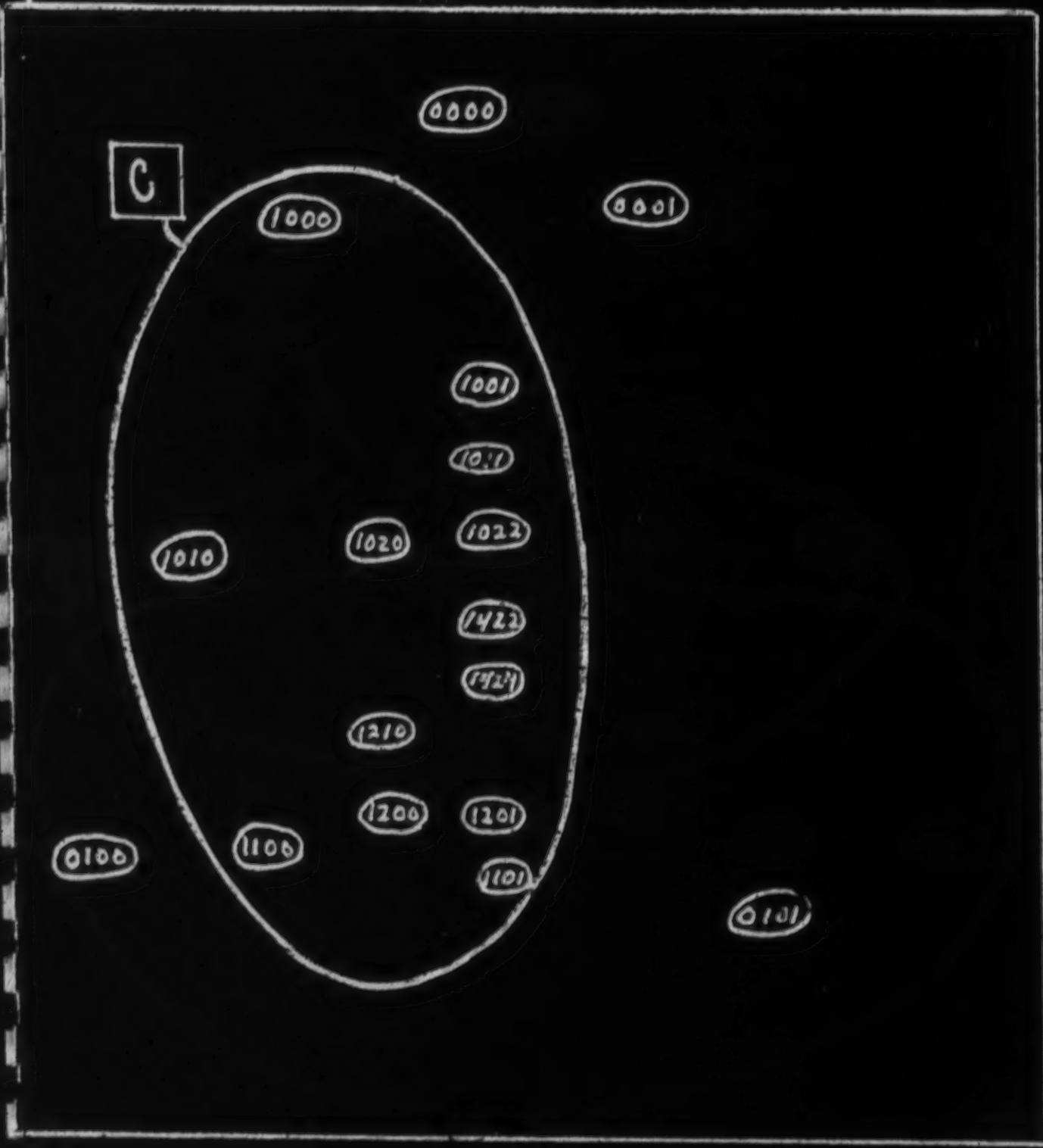


Figure 60 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(2)}$

Figure 61 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement lorsque des classes pour la partition $\Sigma(3)$

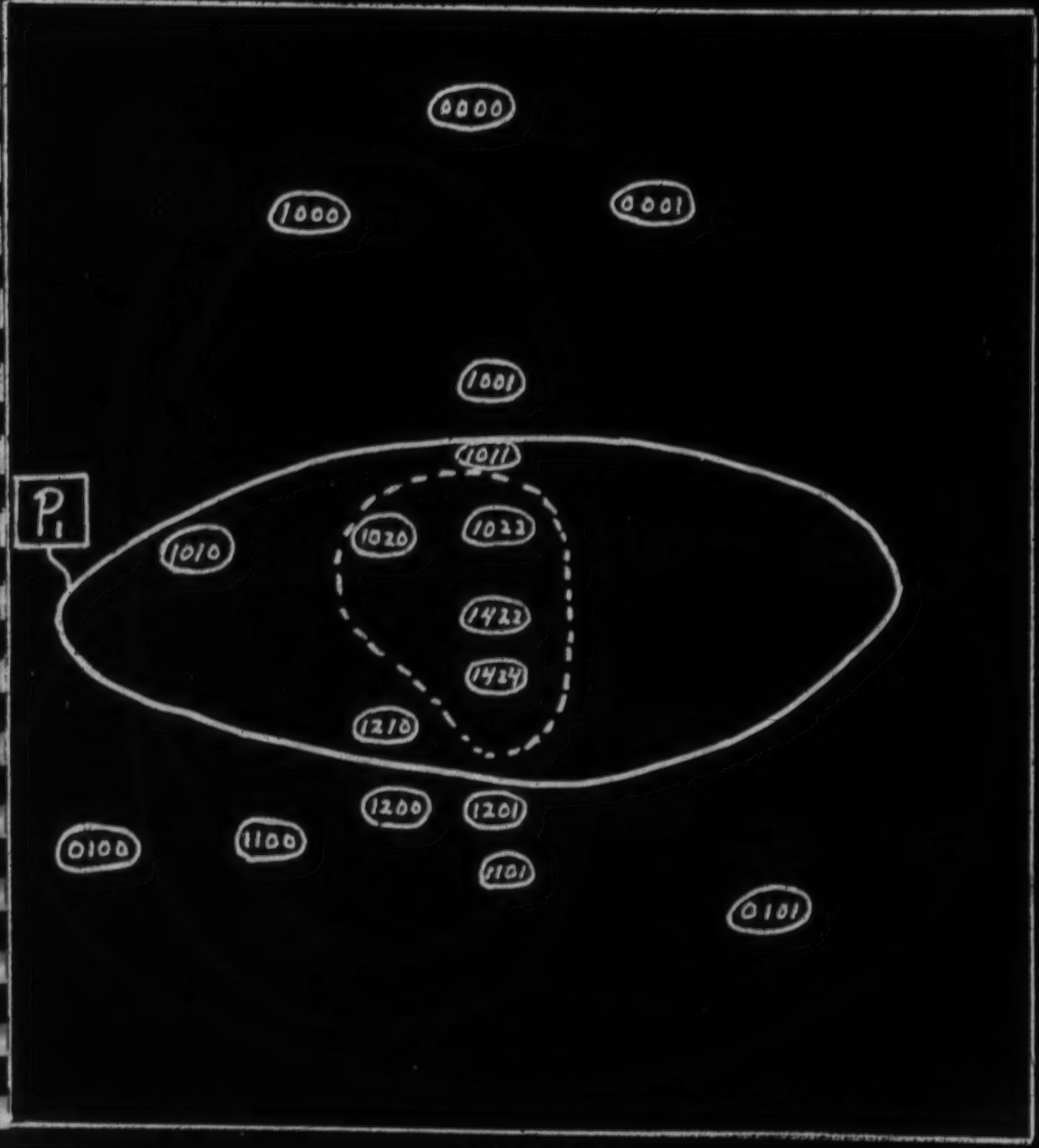


Figure 62 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(4)}$

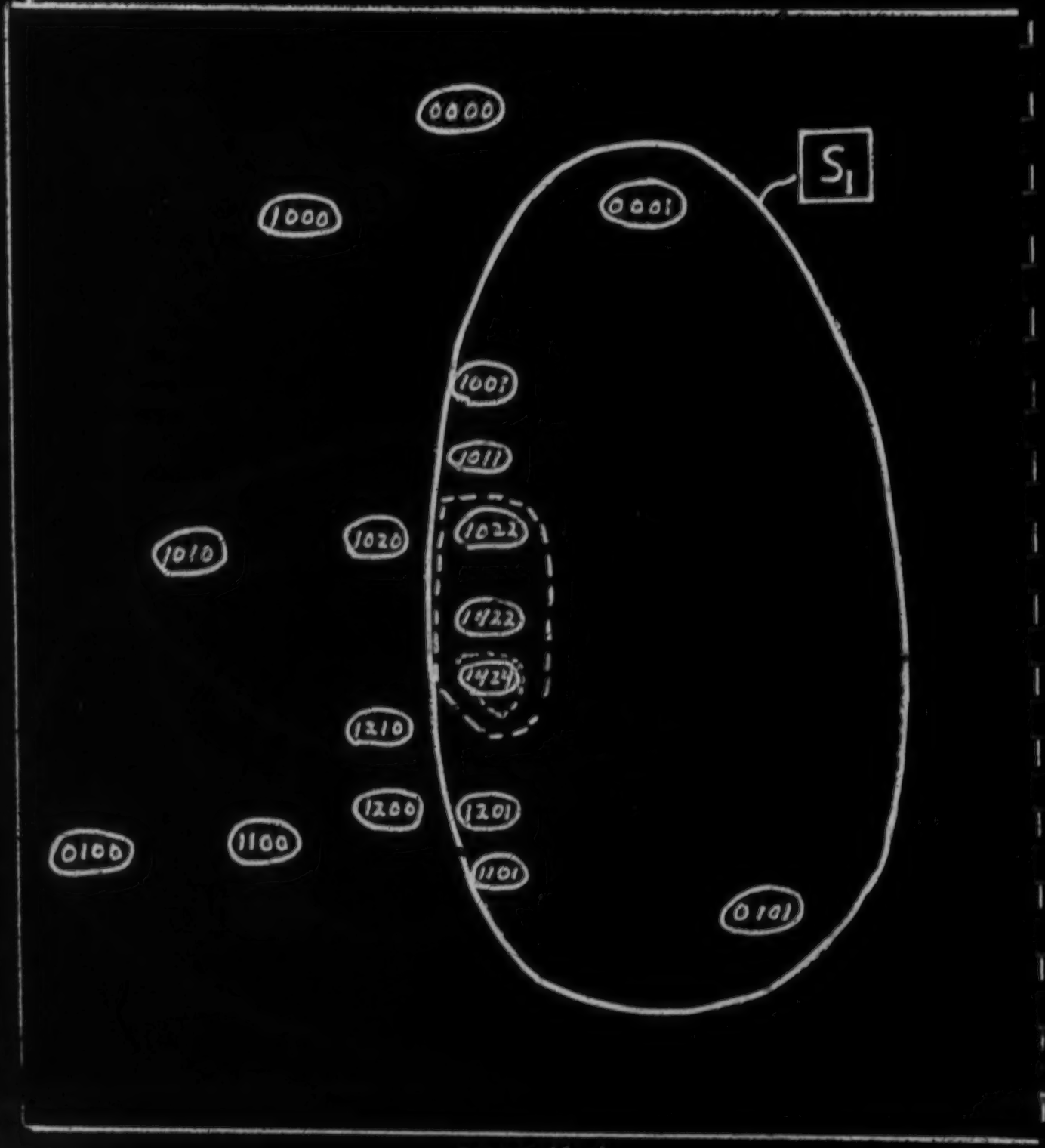


Figure 63 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z(1,3)$

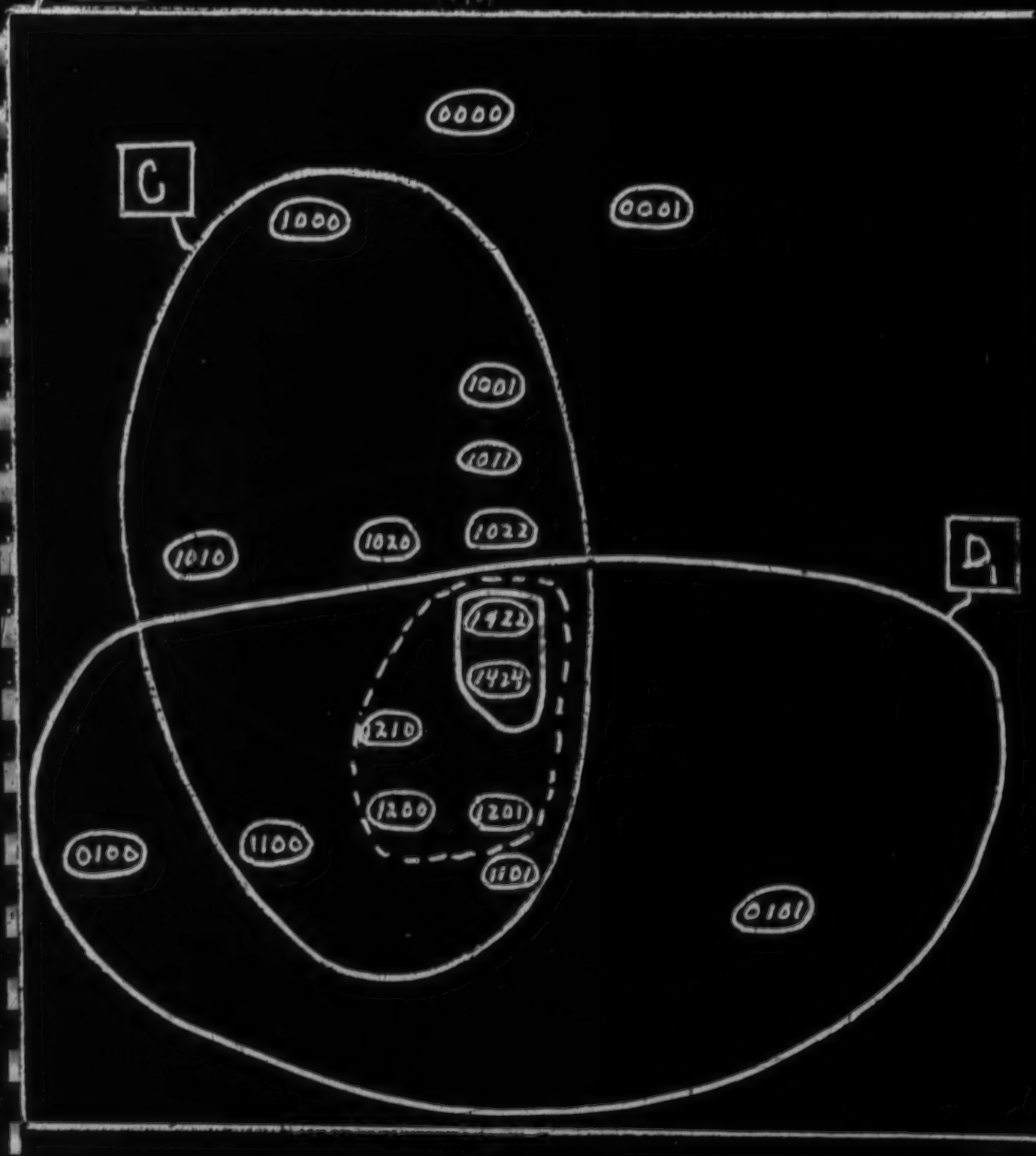


Figure 6: a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(1,3)}$

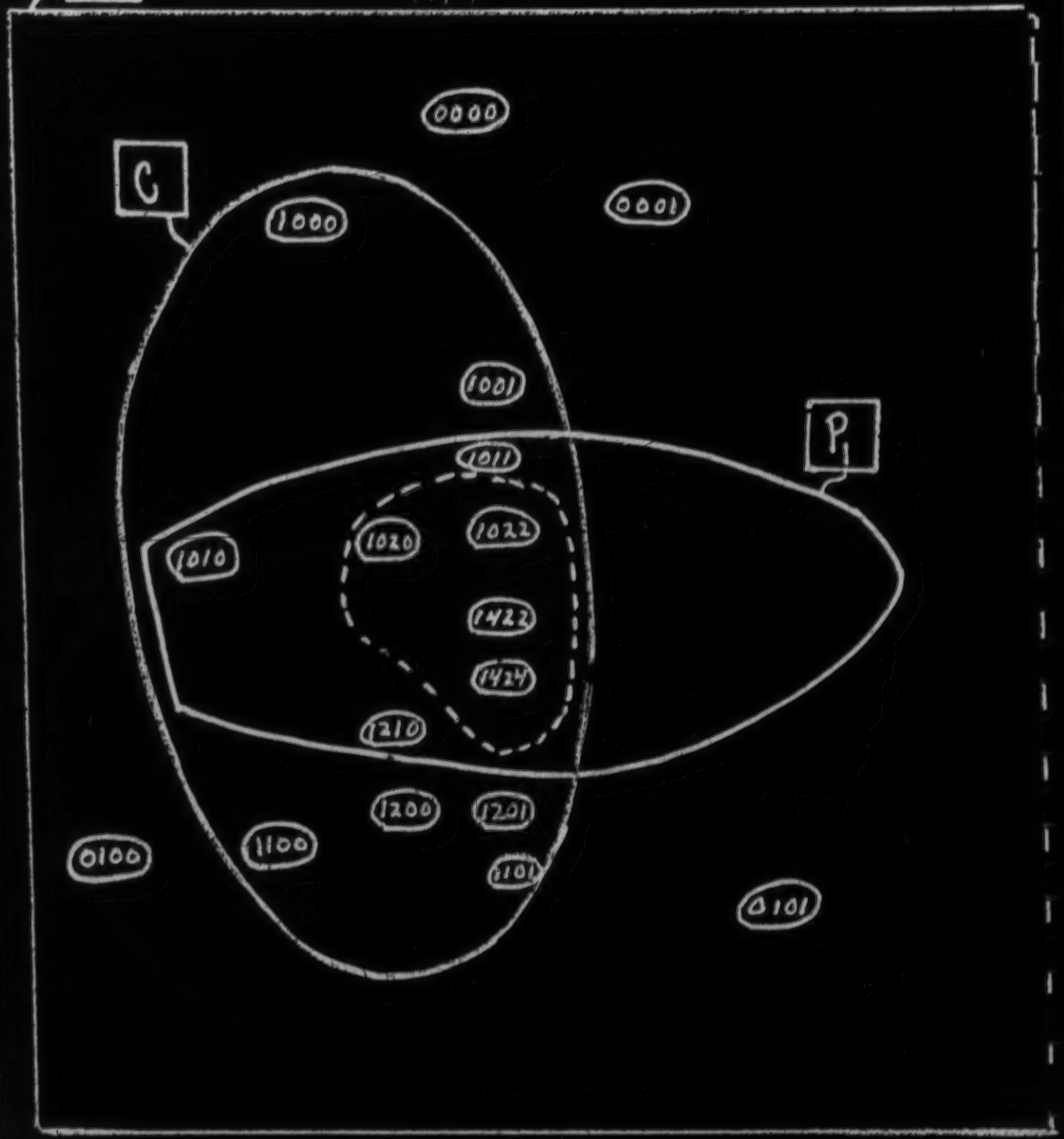


Figure 65 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(1,1)}$

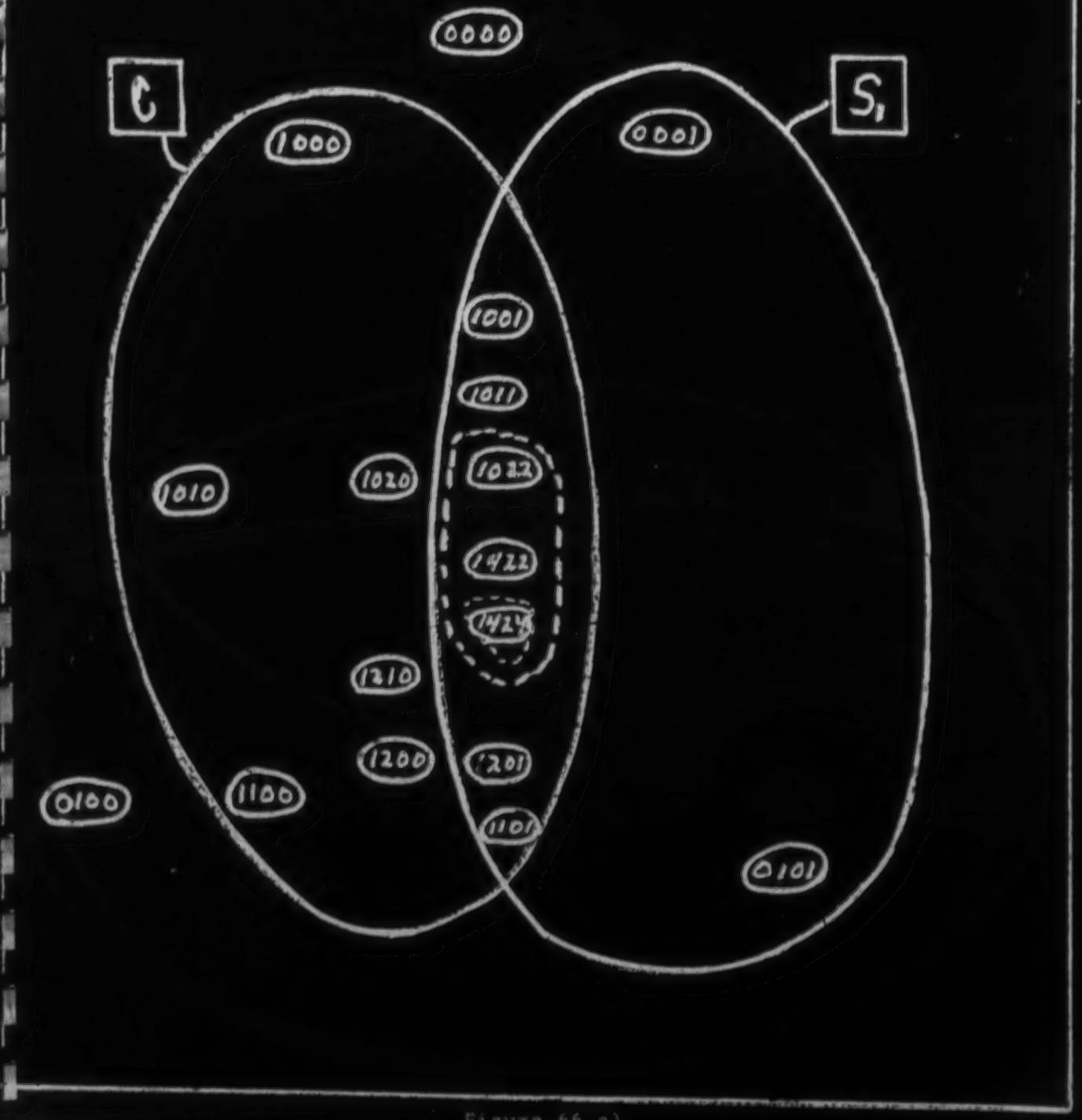


Figure 66 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(2,3)}$

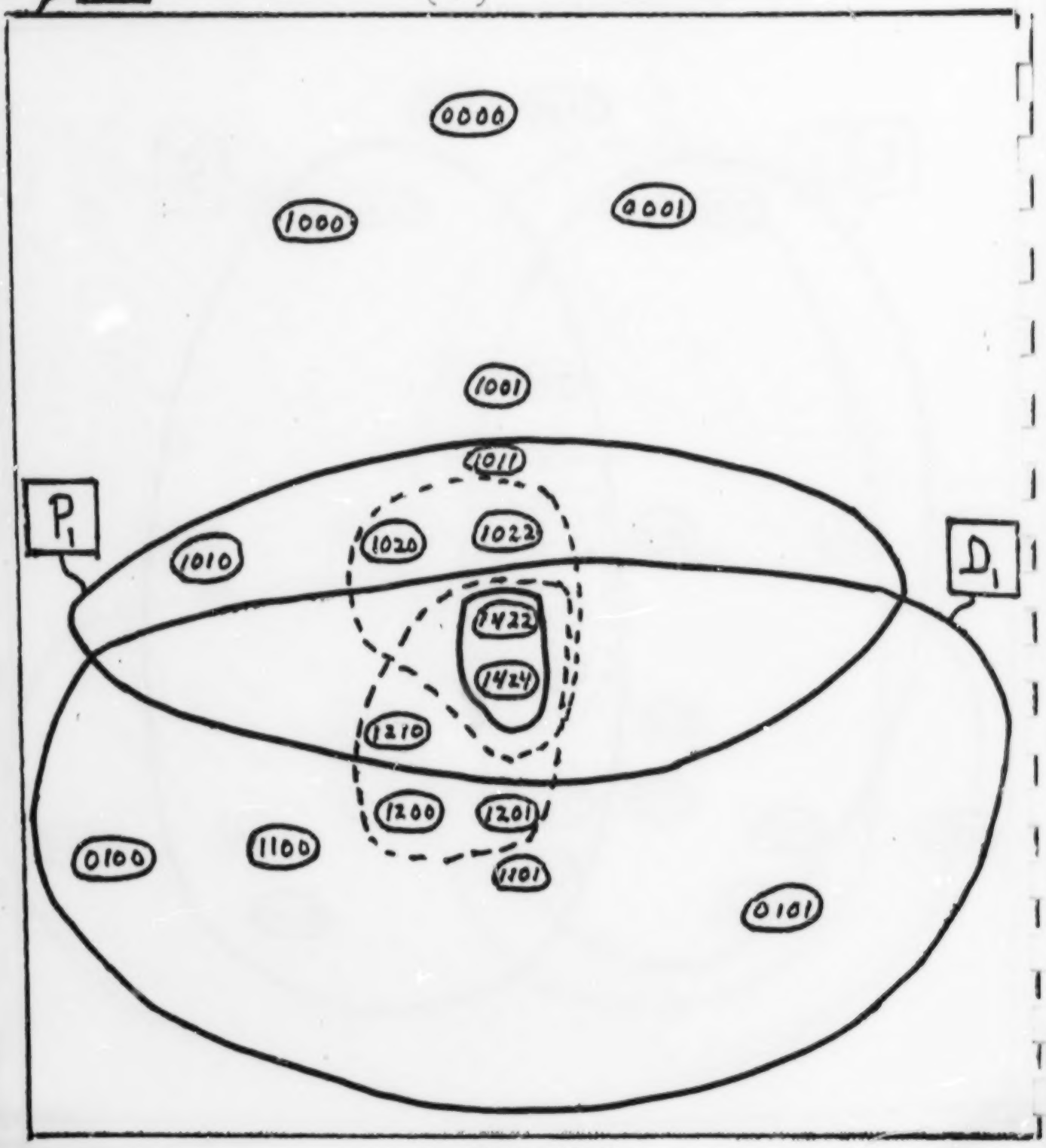


Figure 67 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{\langle 2,4 \rangle}$

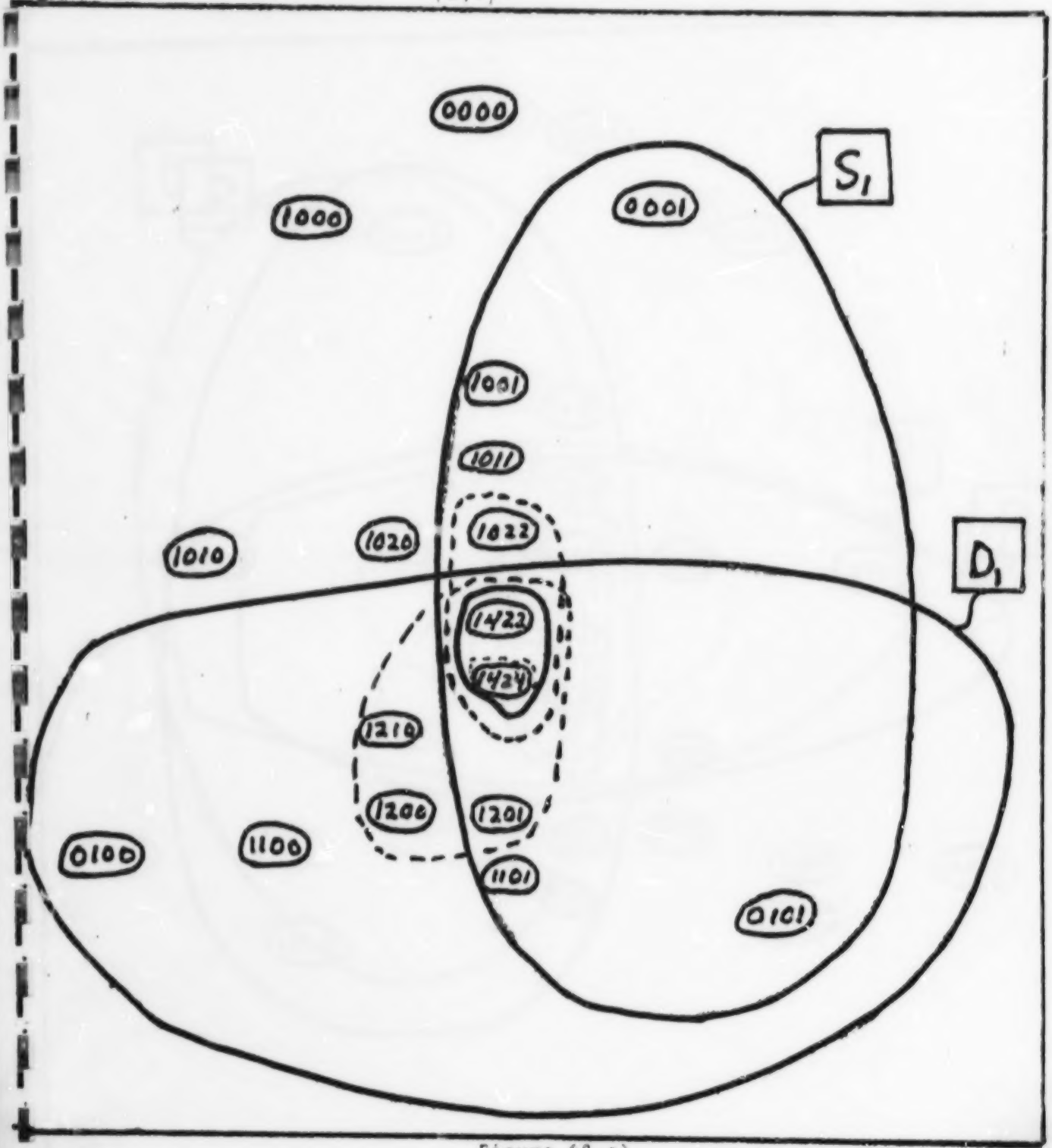


Figure 68 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(3,4)}$

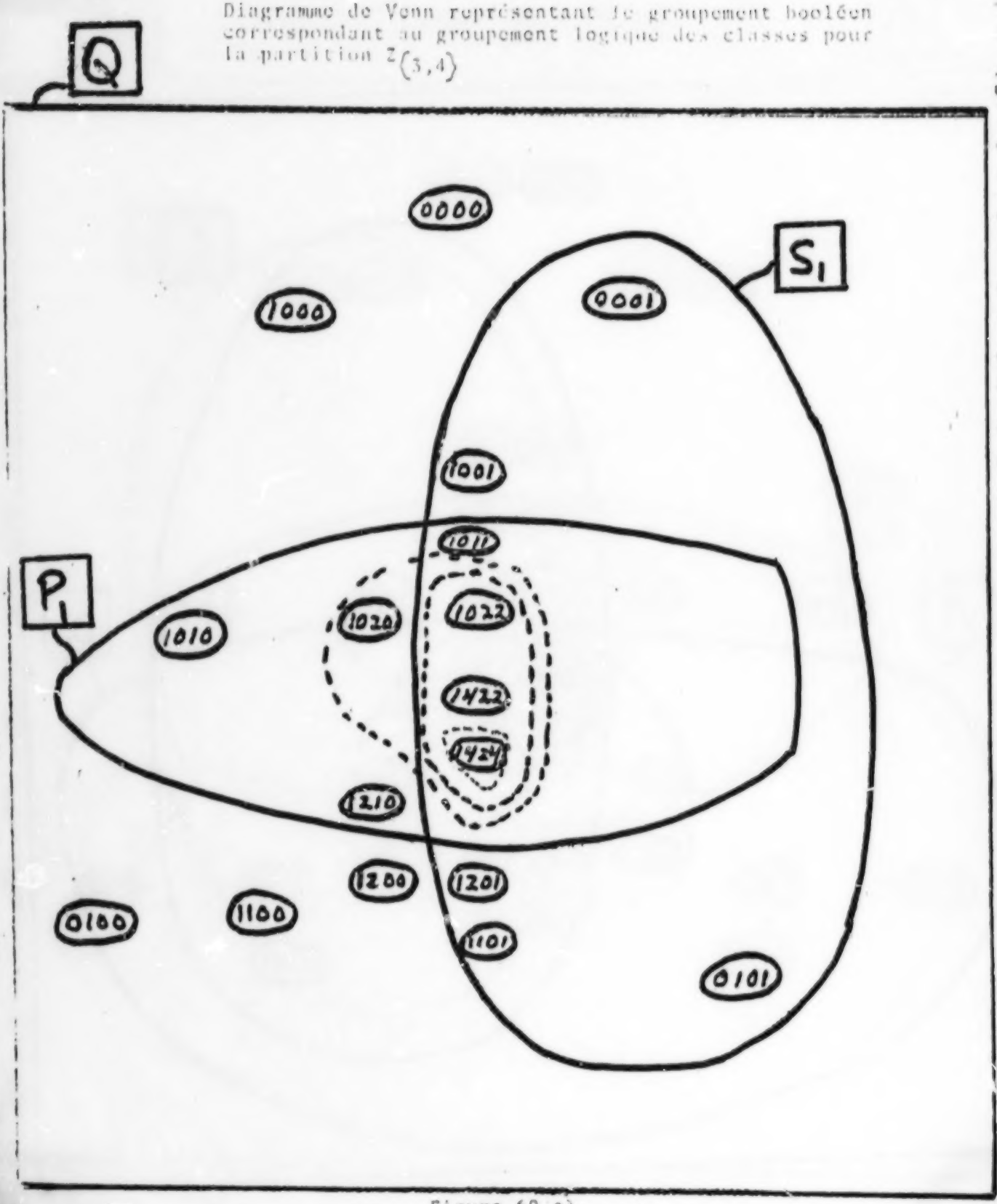


Figure 69 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(1,2,3)}$

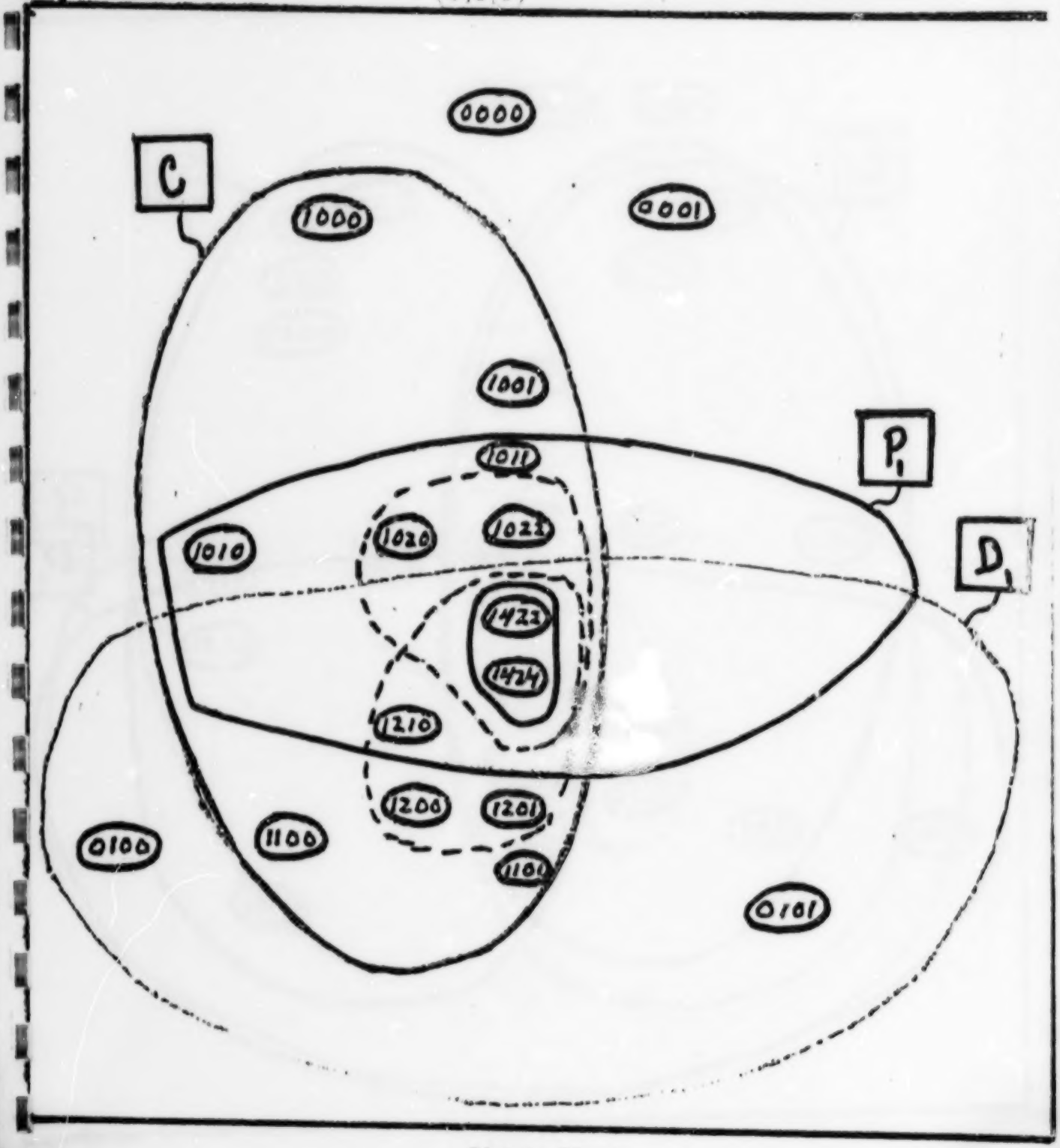


Figure 70 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(1,2,4)}$

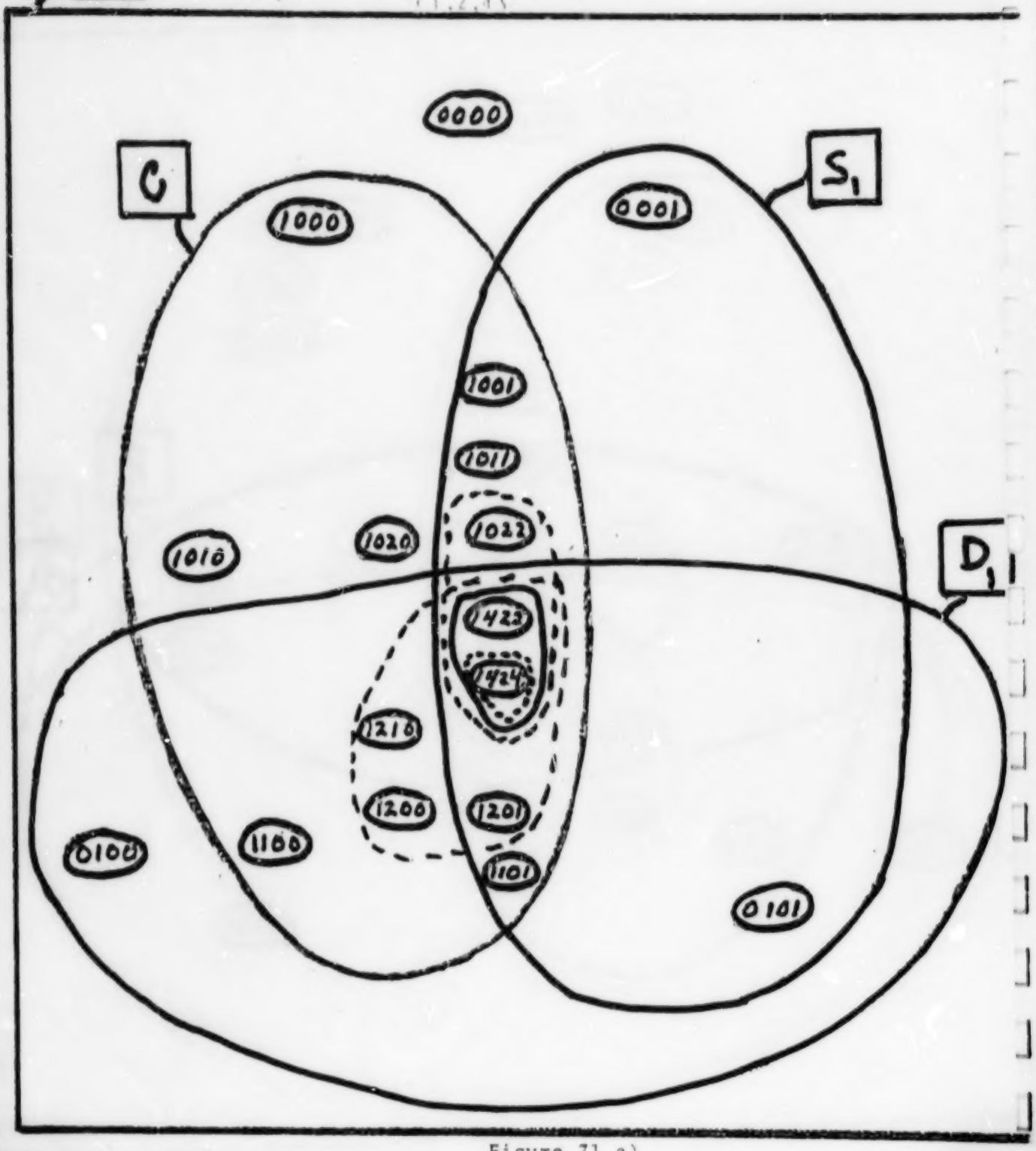


Figure 71 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{\{1,3,4\}}$

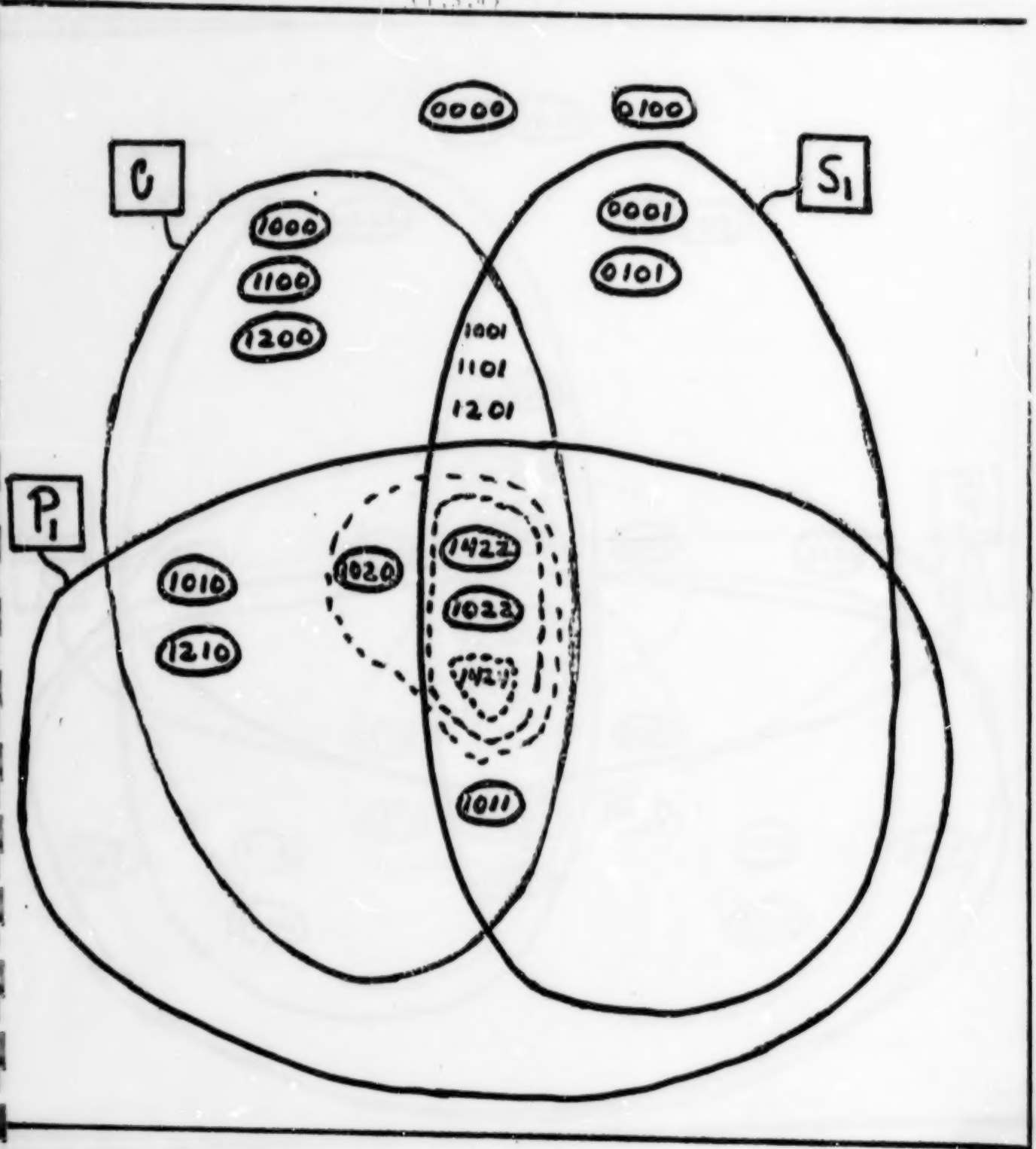


Figure 72 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(2,3,4)}$

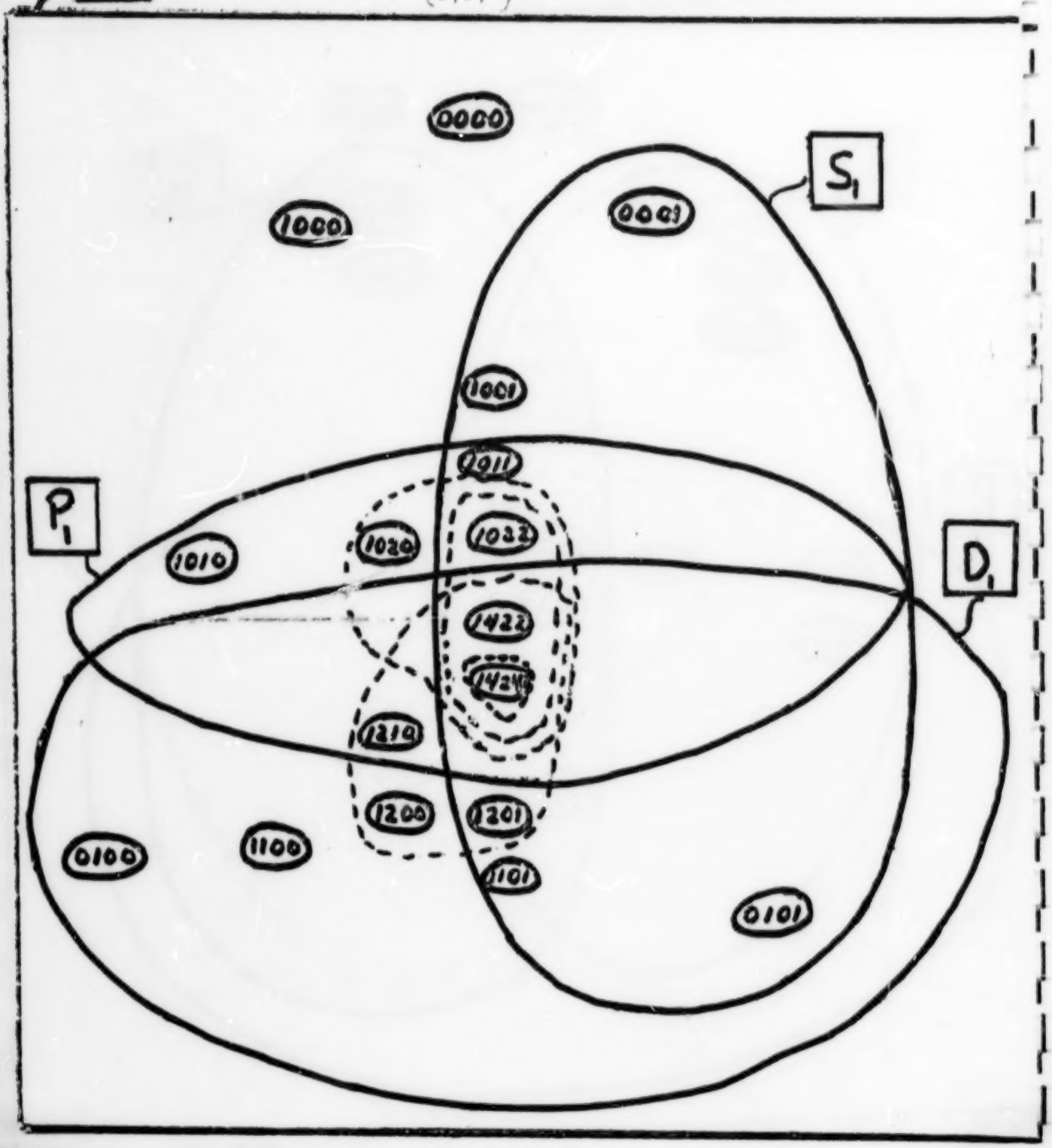


Figure 73 a)

Diagramme de Venn représentant le groupement booléen correspondant au groupement logique des classes pour la partition $Z_{(1,2,3,4)}$

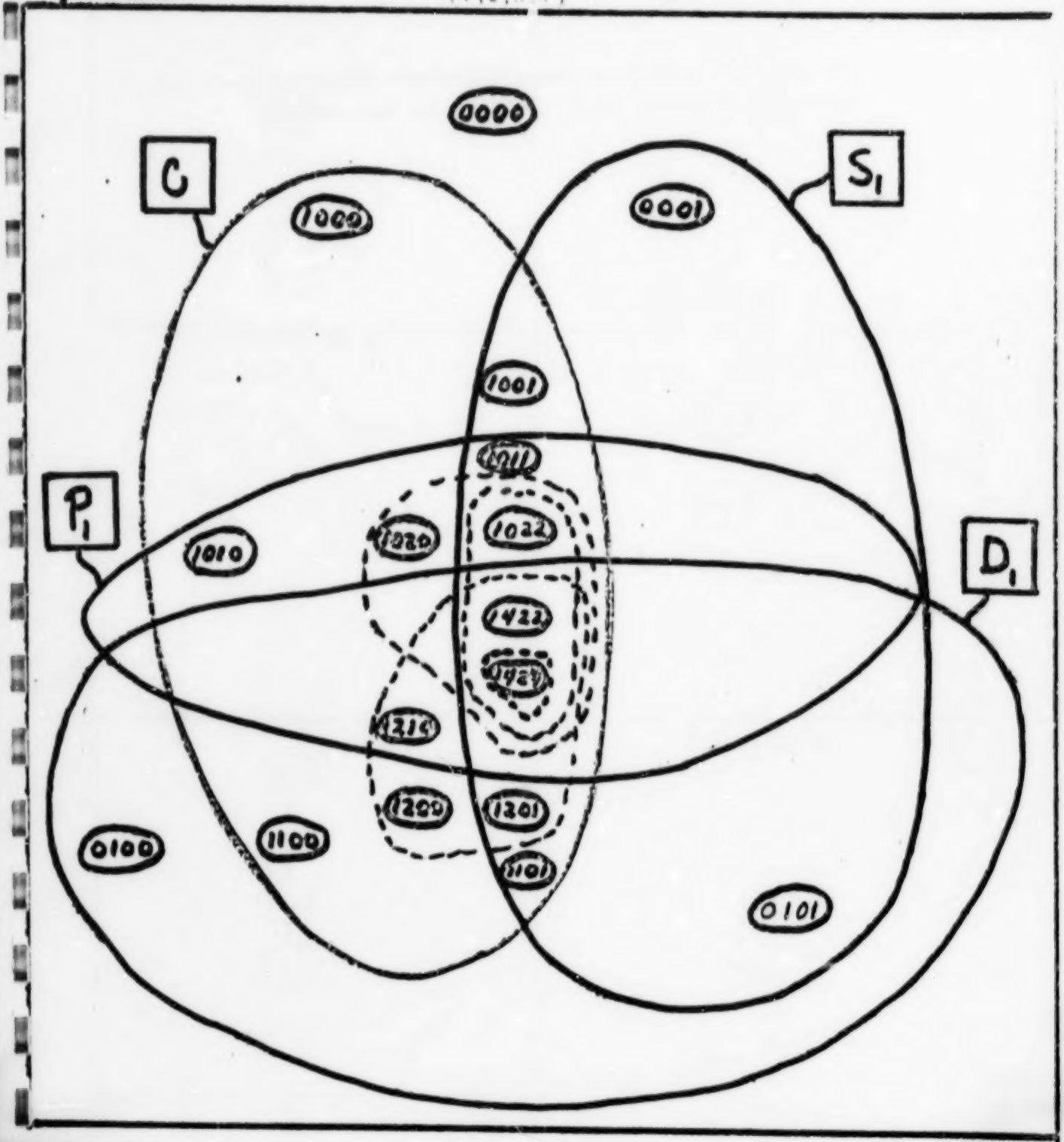


Figure 74 a)

Les graphes sagittaux des groupements booléens sont les suivants: Figures 59 b) à 74 b) inclusivement.

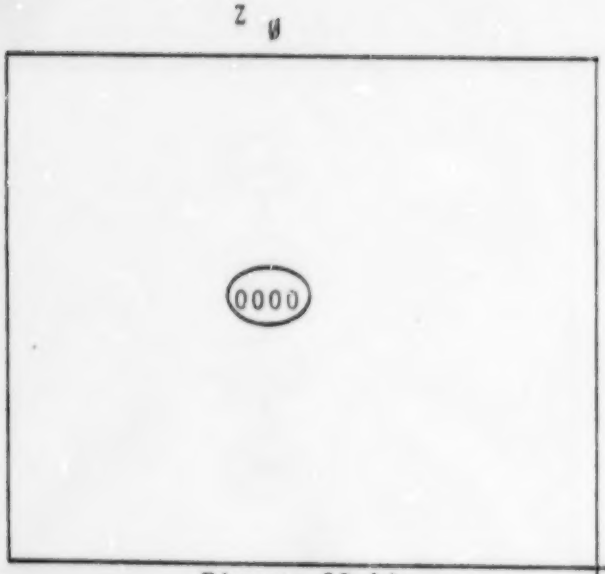


Figure 59 b)

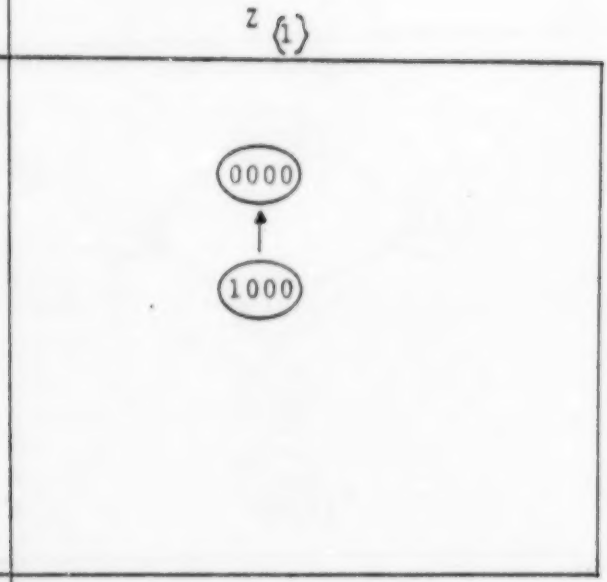


Figure 60 b)

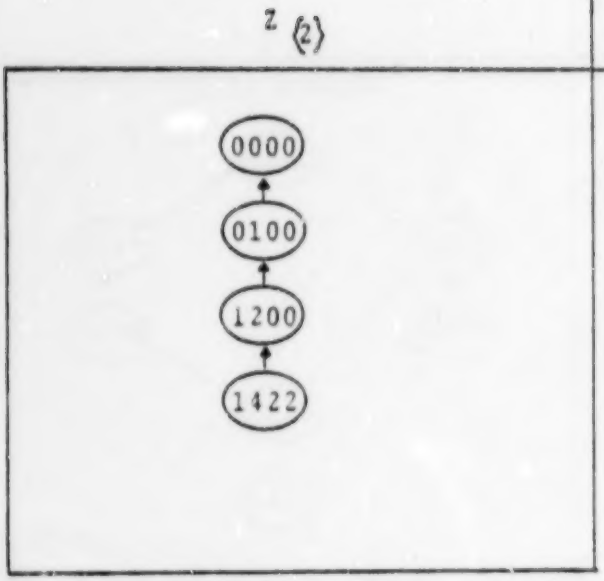


Figure 61 b)

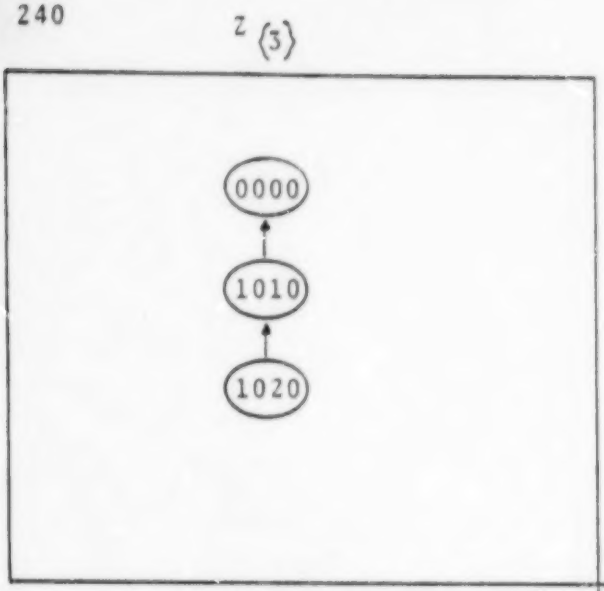


Figure 62 b)

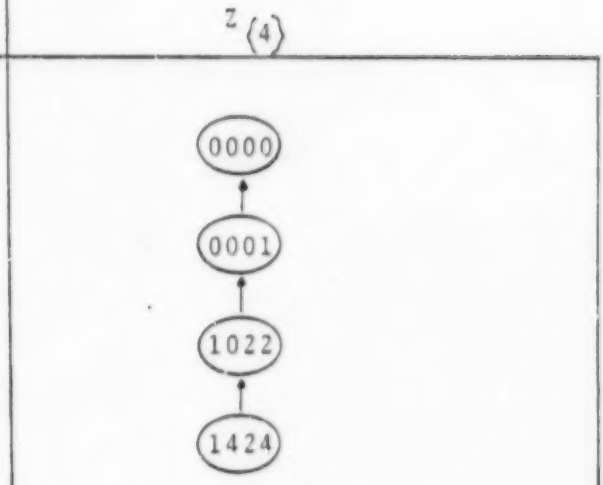


Figure 63 b)

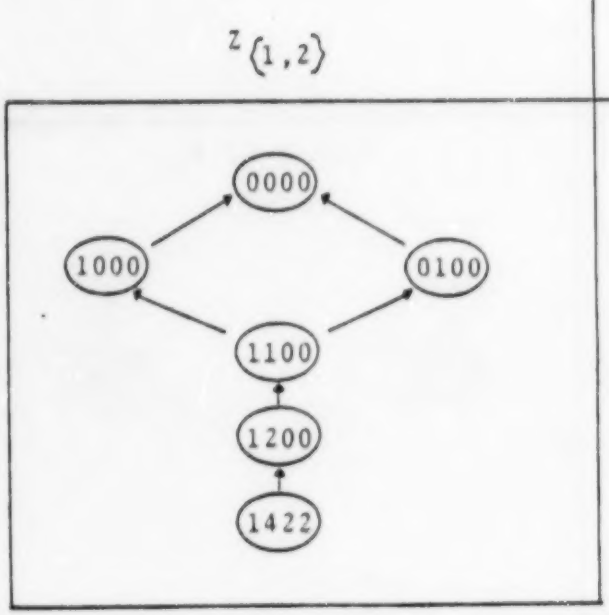


Figure 64 b)

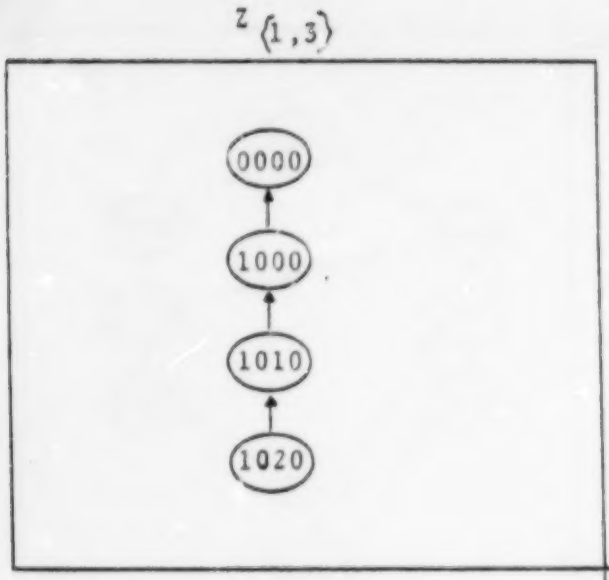


Figure 65 b)

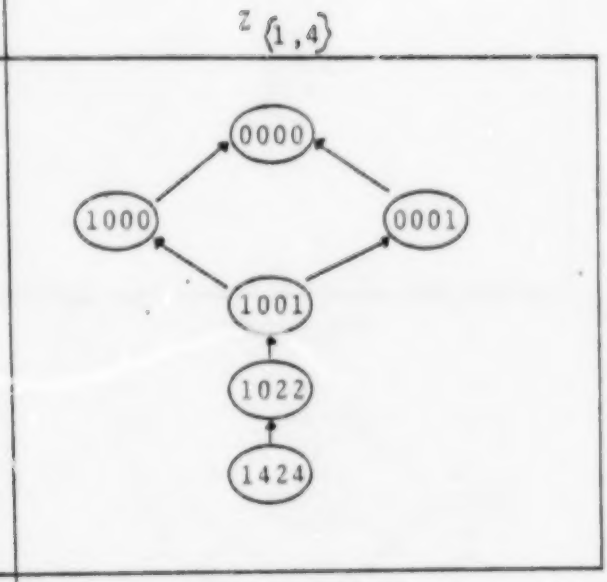


Figure 66 b)

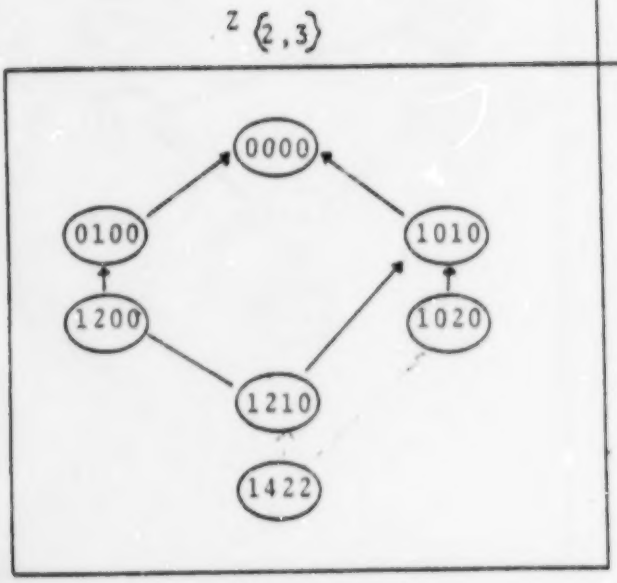


Figure 67 b)

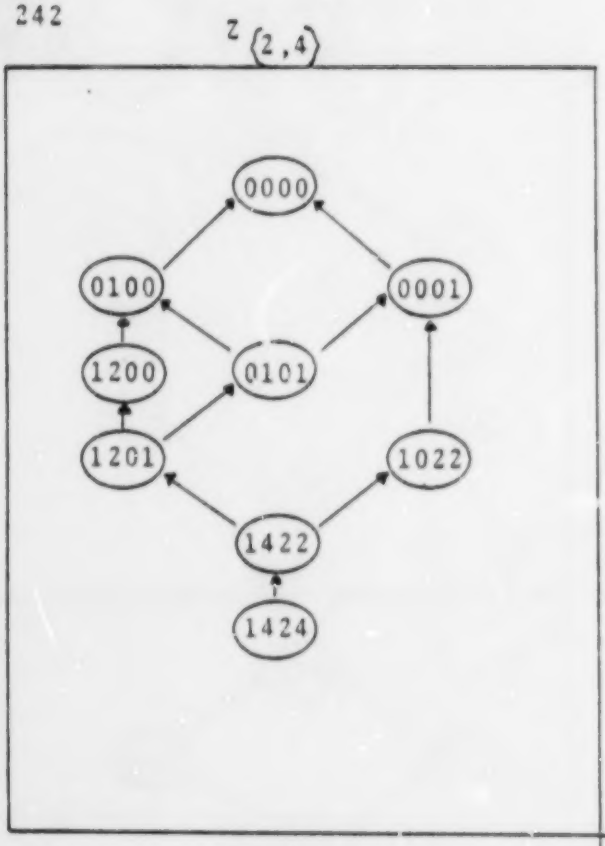


Figure 68 b)

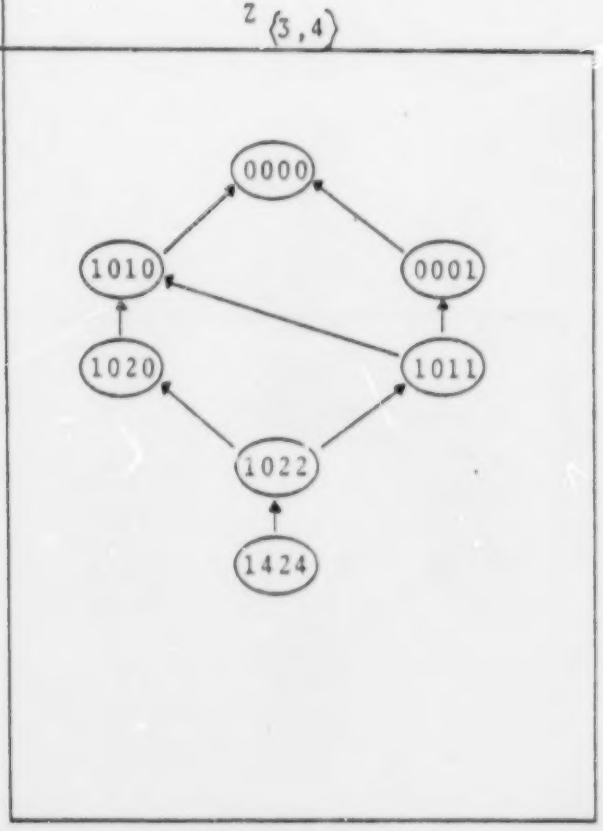


Figure 69 b)

$Z_{\langle 1,2,3 \rangle}$

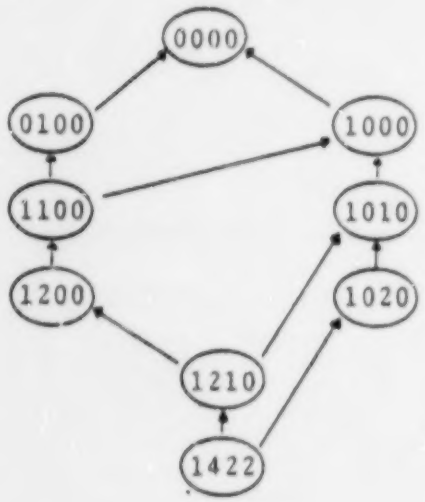


Figure 70 b)

$Z_{\langle 1,2,4 \rangle}$

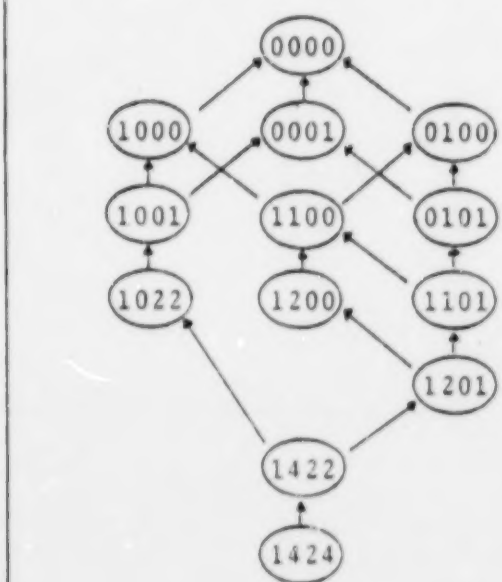


Figure 71 b)

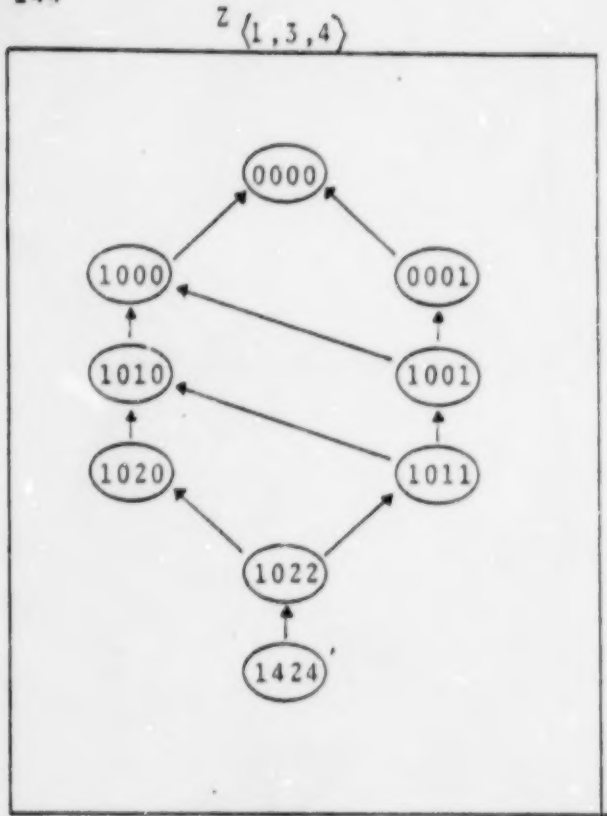


Figure 72 b)

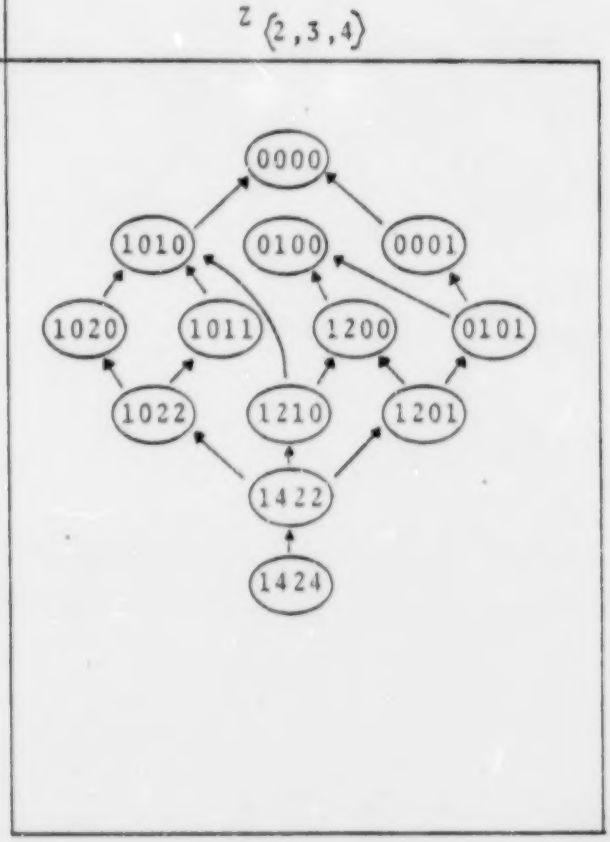


Figure 73 b)

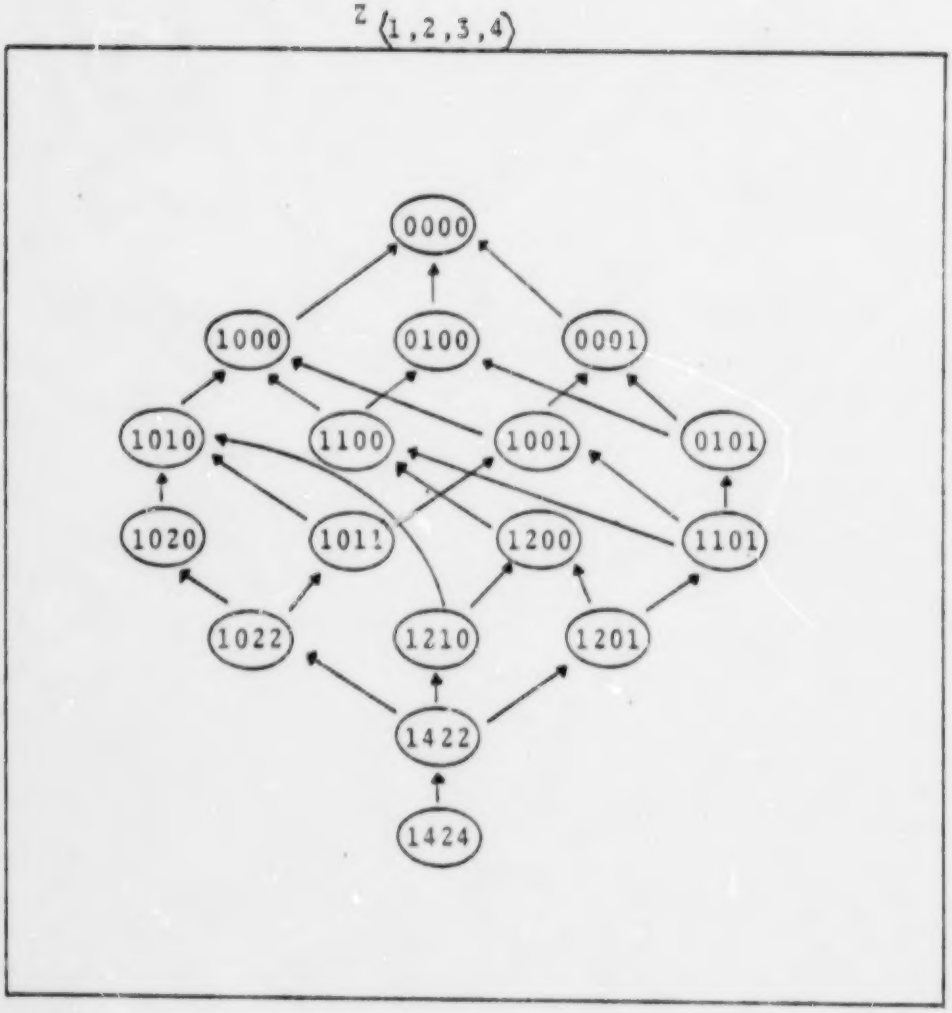

Z ⟨1,2,3,4⟩
0000
1000
0100
0001
1010
1100
1001
0101
1020
1011
1200
1101
1022
1210
1201
1422
1424

Figure 74 b)